

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

12. Band, Heft 4 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 145—192

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Carnap, Rudolf: Ein Gültigkeitskriterium für die Sätze der klassischen Mathematik. *Mh. Math. Phys.* 42, 163—190 (1935).

In Gegensatz zu finiten Entscheidungskriterien und zum Begriff der Ableitbarkeit setzt der Autor sein Kriterium der „Analytizität“ eines mathematischen Satzes (bzw. einer Satzklasse), das auf eine endliche Zahl von Einzelschritten zurückgeht, die aber ihrerseits nicht „definit“ sind, d. h. über die nicht endlich entschieden werden kann (vgl. auch Carnap: *Logische Syntax der Sprache*. 1934). Dieses Kriterium, das die logistische Präzisierung einer Art extensionaler Gültigkeit darstellt, sei an den elementarsten Beispielen vorgeführt. $(x)P(x)$ (P ein Prädikat für Zahlen) heißt analytisch (bzw. kontradiktorisch), wenn $P(1), P(2), \dots$ gültig sind (bzw. eines von ihnen ungültig ist); $(F) \subseteq (F)$ (F ein Prädikat für Zahlen, \subseteq ein Prädikatenprädikat) heißt analytisch (bzw. kontradiktorisch), wenn alle Sätze $\subseteq (\mathfrak{B}_i)$ gültig sind, wo \mathfrak{B}_i alle möglichen „Bewertungen“ für F durchläuft [bzw. wenn ein $\subseteq (\mathfrak{B}_i)$ ungültig ist]. „Dabei wollen wir unter einer möglichen Bewertung (\mathfrak{B}) für „ F “ eine Klasse (d. h. syntaktische“ [soviel wie metamathematische] „Eigenschaft) von Strichausdrücken“ (Ziffern) „verstehen.“ — Einige Beispiele von Sätzen, für die das Kriterium eine Entscheidung über Analytizität gestattet — im allgemeinen ist das nicht der Fall, vgl. z. B. den von C. erwähnten großen Fermatschen Satz —, werden angegeben. Als wichtigste Beispiele fungieren der Satz von der vollständigen Induktion und das Auswahlprinzip. Sie sind als analytisch zu erkennen, indem die vollständige Induktion bzw. das Auswahlprinzip in der syntaktischen Überlegung benutzt wird; „den Nachweis dafür, daß ein gewisser Satz \subseteq_i der Objektsprache C “ (d. i. der der logistischen Präzisierung zugrunde liegende Formalismus) „analytisch ist, können wir in unserer Syntaxsprache S (für die wir hier eine nicht genauer fixierte Wortsprache genommen haben) dann führen, wenn wir in S einen gewissen Satz zur Verfügung haben, und zwar gerade den Satz von S , der (bei üblicher Übersetzung) in den Satz \subseteq_1 von C übersetzbar ist. Hieraus geht hervor, daß unser Beweis nicht etwa zirkelhaft ist.“ Die beiden genannten Beweise „dürfen nicht so gedeutet werden, als sei durch sie gezeigt, daß das Induktionsprinzip und das Auswahlprinzip inhaltlich richtig sind. Vielmehr ist nur gezeigt, daß unsere Definition für ‚analytisch‘ in diesen Punkten das trifft, was sie treffen soll: sie soll einen Satz als analytisch ergeben, wenn er bei inhaltlicher Deutung als logisch gültig angesehen wird“. Der Autor setzt sich in bejahendem Sinne mit der Frage auseinander, inwiefern die Analytizität von der Syntaxsprache S unabhängig sei, was offenbar für die intendierte Interpretation des Satzes 5: „Jeder logische Satz ist entweder analytisch oder kontradiktorisch“ wesentlich ist. — Zum Schluß wird angedeutet, wie der Begriff der Analytizität auf einen nichtfiniten Widerspruchsfreiheitsbeweis für einen Formalismus C führt, der allerdings die Widerspruchsfreiheit der reicheren Syntaxsprache S voraussetzt.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Klein, Fritz: Grundzüge der Theorie der Verbände. *Math. Ann.* 111, 596—621 (1935).

Der Begriff des Verbandes (Klein, *Math. Z.* 39; dies Zbl. 9, 387; s. auch dies. Zbl. 6, 385) wird axiomatisch in abgerundeter Form herausgearbeitet, wobei auch eine Reihe von „Abhängigkeits“-Beziehungen [wie z. B. $a \cap (b \cup c) \supseteq (a \cap b) \cup (a \cap c)$] angegeben wird. Die (zum größten Teil bereits in früheren Arbeiten des Verf. gegebenen) Beispiele von Verbänden werden zusammengestellt und diskutiert. Ein Abschnitt ist denjenigen Verbänden gewidmet, deren Elemente sich auf Grund der Ver-

knüpfungen linear ordnen lassen. Die folgenden Sätze über Unterverbände werden bewiesen: Ein Verband n -ter Ordnung enthält einen Unterverband $n - 1$ -ter Ordnung für $2 \leq n \leq 7$, nicht aber allgemein für $n = 8$. Ein Verband von höherer als k -ter Ordnung enthält einen Unterverband k -ter Ordnung für $k \leq 5$, nicht aber allgemein für $n = 7$. Bei den Beweisen wird die Repräsentierbarkeit der endlichen Verbände durch gewisse (ebene oder räumliche) Streckensysteme benutzt, die auch eine anschauliche Übersicht über die Verbände mit kleiner Ordnung vermittelt.

A. Schmidt (Göttingen).

Huntington, Edward V.: *Inter-relations among the four principal types of order.* Trans. Amer. Math. Soc. **38**, 1—9 (1935).

Ausgehend von vier Axiomensystemen für lineare Ordnung, nämlich für (1) serial order, (2) betweenness, (3) cyclic order, (4) separation (bezüglich der letzten drei Axiomensysteme siehe die in dies. Zbl. **4**, 147 angegebenen Arbeiten des Verf.) "we . . . develop the way in which each of these four types may be defined in terms of each of the other three". (2), (3), (4) lassen sich ohne weiteres auf (1) zurückführen, ebenso (4) auf (2) oder (3). Zur Zurückführung von (1) auf (3) und ebenso von (2) auf (3) oder (4) ist ein Element auszuzeichnen, zur Zurückführung von (1), (3) auf (2) zwei Elemente und endlich zur Zurückführung von (1), (3) auf (4) drei Elemente.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Kleene, S. C., and J. B. Rosser: *The inconsistency of certain formal logics.* Ann. of Math., II. s. **36**, 630—636 (1935).

The authors show that certain systems of symbolic logic are inconsistent in the sense that every formula expressible in their notation is proveable. These systems include the one proposed by Church (Ann. of Math. **33**; this Zbl. **4**, 145), and what the present reviewer has called an \mathfrak{L} system [Ann. of Math. **35**, 854 (1934); this Zbl. **10**, 146]; on the other hand the more recent work of Church (since 1934) and the bulk of the reviewer's "combinatory logic" are not affected. The argument is a modification of the Richard paradox; it rests on the construction of relatively complicated numerical functions (see S. C. Kleene, Amer. J. Math. **57**; this Zbl. **11**, 241).

H. B. Curry (State College, Penna.).

Ambrose, Alice: *Finitism in mathematics.* Mind **44**, 186—203 u. 317—340 (1935).

Verf. betrachtet zunächst die wichtigsten Argumente, die für und gegen die intuitionistische Unterscheidung zwischen einer Existenzaussage und der Negation der konträren Allaussage vorgebracht worden sind. Seine Verteidigung des Intuitionisten gegen die aufgeführten Einwände "in many cases will be a statement of what he should claim as opposed to what he does claim". Bezüglich des hierbei eingenommenen Standpunktes wird auf Vorlesungen von Wittgenstein verwiesen. — Verf. schließt sich in der Formulierung der intuitionistischen Thesen meist an Weyl an, setzt sich jedoch bezüglich der Widerlegung einer Allaussage von dessen Auffassung (vgl. Weyl, Consistency in Mathematics, Rice Institute Pamphlet **16**, 247) ab. — Der zweite Teil der Untersuchungen geht insbesondere auf die Schwierigkeiten ein, die sich dem Versuch, den Sinn (meaning) etwa einer infiniten existentialen Aussageform aus ihrem (denkbaren) Beweise zu erklären, entgegenstellen. Abschließend werden einige der wichtigsten Konsequenzen der intuitionistischen Einstellung für die mathematischen Disziplinen skizziert.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Sapper, K.: *Die Erschütterung des Kausalitätsprinzips in der neuesten Physik.* Scientia **58**, 149—156 (1935).

Guye, Ch.-Eug.: *Les frontières de la physique et de la biologie.* Arch. Sci. Physiques etc. **17**, 5—33 (1935).

Guye, Ch.-Eug.: *Les frontières de la physique et de la biologie. (II. mém.)* Arch. Sci. Physiques etc. **17**, 226—241 (1935).

Algebra und Zahlentheorie.

Littlewood, D. E.: Some properties of S -functions. Proc. London Math. Soc., II. s. 40, 49—70 (1935).

Für die vom Autor und Richardson früher eingeführten S -Funktionen (s. dies. Zbl. 9, 202), daß sind die symmetrischen Funktionen

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = |\alpha_s^{\lambda_1 + n - t}| : |\alpha_s^{n-t}|,$$

werden erzeugende Funktionen, d. h. Potenzreihen, deren Koeffizienten gleich den S -Funktionen sind, angeben. Setzt man

$$f(x) = 1 : \prod_r (1 - \alpha_r x) = 1 + \sum_1^\infty h_n x^n,$$

$$\Delta(x_1, \dots, x_p) = |\alpha_s^{p-t}| = \prod (x_r - x_s) \quad (r < s)$$

so ist
$$\prod_r f(x_r) \cdot \Delta(x_1, \dots, x_p) = \sum \pm \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} x_1^{\lambda_1 + p - 1} x_2^{\lambda_2 + p - 2} \dots x_p^{\lambda_p}.$$

Eine ähnliche Formel gibt die erz.F. für diejenigen S -Funktionen, deren λ_i einen gegebenen Wert nicht überschreiten. Ein dritter Typ von erz.F. gibt diejenigen S -Funktionen, von deren λ_i nicht mehr als m größer als n sind. Der einfachste Fall ist ($m = n = 1$):

$$\frac{f(x) - f(y)}{(x - y)f(y)} = \sum (-1)^\beta \{1 + \alpha, 1^\beta\} x^\alpha y^\beta.$$

Jede S -Funktion kann geschrieben werden als eine Determinante, deren Elemente S -Funktionen vom einfachen Typ $\{1 + \alpha, 1^\beta\}$ sind. Weitere Verallgemeinerungen dieser Formeln sowie eine Verallgemeinerung einer Formel von Frobenius für den Grad eines Charakters der symm. Gruppe werden gewonnen. Auch für die verallgemeinerten S -Funktionen von Naegelsbach und Aitken

$$\{\lambda/\mu\} = |h_{\lambda_i - \mu_i - s + t}|$$

wird eine erz.F. angegeben, nämlich

$$\Phi = \left| \frac{x_i^p f(x_i) - y_i^p f(y_i)}{x_i - y_i} \right| = \sum \{\lambda/\mu\} \prod x_r^{\lambda_r + n - r - k} y_r^{p+1 - \mu_r - n + r + k}.$$

Sätze von Zia-ud-Din und Aitken (vgl. dies. Zbl. 8, 385 und 1, 114) werden neu bewiesen. Eine Verallgemeinerung der Padé-Hadamardschen Approximation von Funktionen durch rationale Funktionen wird angegeben. van der Waerden (Leipzig).

Littlewood, D. E., and A. R. Richardson: Some special S -functions and q -series. Quart. J. Math., Oxford Ser. 6, 184—198 (1935).

Die in einer früheren Arbeit der Autoren (dies. Zbl. 9, 202) definierten S -Funktionen $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ von den Argumenten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ werden jetzt für den Fall $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = q$, $\alpha_3 = q^2, \dots$ errechnet. Als Spezialfälle ($q = \pm 1$) erhält man die Ergebnisse einer Arbeit von 1934 (dies. Zbl. 10, 252/3) wieder. Als Anwendung werden wieder gewisse Relationen zwischen den Charakteren der symm. Gruppe gewonnen sowie eine Methode, die Charaktere als Koeffizienten einer gewissen Partialbruchentwicklung zu bestimmen. — Die S -Funktionen werden verallgemeinert. Ist

$$f(x) = 1 + \sum_1^\infty h_n x^n$$

eine Potenzreihe und setzt man

$$f'(x)/f(x) = \sum S_r x^{r-1},$$

so kann man die S -Funktionen $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ als Funktionen der S_r durch die Formeln

$$S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} \dots S_p^{\alpha_p} = \sum_{(\lambda)} \chi_e^{(\lambda)} \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$$

definieren. Im Spezialfall $f(x) = \prod_r (1 - \alpha_r x)^{-1}$ erhält man die alten S -Funktionen

von endlich vielen Argumenten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Insbesondere werden die S -Funktionen der Potenzreihen $\Phi(q, x)^{-1} = \{(1 - x)(1 - qx)(1 - q^2x) \dots\}^{-1}$

und $\Phi(q, x)^{-1} \Phi(q, z x)$ angegeben.

van der Waerden (Leipzig).

Dickson, L. E.: Linear algebras with associativity not assumed. Duke math. J. 1, 113—125 (1935).

Die Arbeit enthält neue Beispiele von nichtassoziativen Algebren. Für die Algebren vom Rang 2 werden Normalformen angegeben für den Grad 3 und Bedingungen für Nullteilerfreiheit diskutiert. Ferner werden Algebren angegeben, die verschiedenen Rechts- und Linksrang haben. Z. B. die mit der Basis $1, e_1, e_2, e_3$; $1 \cdot e_i = e_i \cdot 1 = e_i$; $e_1^2 = e_2, e_2 e_1 = e_3, e_i e_j = 0$ sonst. Das allgemeine Element $X = x_0 + \sum x_i e_i$ genügt der Gleichung $(X - x_0)(X - x_0)^2 = 0$, also ist der Linksrang 3; da aber $1, e_1, e_1^2 = e_2, e_1^2 e_1 = e_3$ linear unabhängig sind, so ist der Rechtsrang 4. Auch für Algebren vom Linksrang 3 werden Normalformen aufgestellt. Zum Schluß werde mittels einer zyklischen Gleichung n -ten Grades, deren Wurzeln $J, J' = J^0, \dots, J^{(n-1)} = J^{n-1}$ seien, folgendermaßen eine Algebra konstruiert: I sei ein Symbol. Die Algebrenelemente sind $A(J) + B(J)I$, A und B Polynome im Grundkörper F , und die Multiplikation wird durch

$$(A + BI)(X + YI) = R + SI \quad \text{mit} \quad R = AX + gBY^0, S = BX^0 + AY$$

definiert; $g \neq 0$ liegt im Grundkörper. Man findet leicht die Bedingung für Nullteilerfreiheit: für $n = 2$ stets, für $n \geq 3$, falls $g^n N(J)$ nicht das Quadrat einer Norm aus $F(J)$ ist. Deuring (Leipzig).

Spampinato, N.: Sulle funzioni totalmente derivabili in un'algebra reale o complessa dotata di modulo. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 683—687 (1935).

This is a continuation of Note I [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 621—625 (1935); this Zbl. 12, 101] containing examples and contacts with the literature.

MacDuffee (Madison).

Spampinato, N.: Una proprietà caratteristica delle funzioni totalmente derivabili. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 688—692 (1935).

Three more examples are given to illustrate Note I [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 626—631 (1935); this Zbl. 12, 102]. MacDuffee (Madison).

Tannaka, Tadao: Zyklische Zerfällungskörper der einfachen Ringe über dem algebraischen Funktionenkörper. Sei. Rep. Tōhoku Univ., I. s. 24, 165—172 (1935).

Der Grunwaldsche Existenzsatz besagt: Zu endlich vielen Moduln p^r aus dem Zahlkörper k seien Charaktere $\chi_p(\alpha)$ vorgegeben. Es gibt dann unendlich viele zyklische Körper K/k , für die das Normenrestsymbol $\left(\frac{\alpha, K}{p}\right)$ mit den $\chi_p(\alpha)$ im wesentlichen übereinstimmt. (Vgl. dies. Zbl. 6, 252 u. 5, 51.) — Verf. weist darauf hin, daß sich der Beweis auf (algebraische) Funktionenkörper k' (einer Variablen) mit p^r Konstanten übertragen läßt, wenn p nicht in der Ordnung N der $\chi_p(\alpha)$ aufgeht. Als Ersatz für den Fall $p|N$ wird der etwas schwächere Satz bewiesen: Zu endlich vielen Stellen p aus dem Funktionenkörper k'' der Charakteristik p mit vollkommenem Konstantenkörper gibt es unendlich viele zyklische Körper K/k'' vom Grade p^f , in welchen die p voll verzweigt werden. — Zusammengekommen folgt jetzt: Jede einfache normale Algebra A über dem Körper k' ist zyklisch, $A = (\alpha, K, \sigma)$. Unter solchen Körpern K gibt es unendlich viele, welche genau denselben Konstantenkörper haben wie k' .

Ernst Witt (Göttingen).

Witt, Ernst: Zwei Regeln über verschränkte Produkte. J. reine angew. Math. 173, 191—192 (1935).

$a_{\sigma, \tau}$ sei ein Faktorensystem zu dem galoisschen Körper K/k . Aus der Assoziativregel $a_{\sigma, \tau}^g a_{\sigma, \sigma\tau} = a_{\sigma, \sigma} a_{\sigma\sigma, \tau}$ folgt, daß auch $a_{\sigma, \tau}^g$ ein Faktorensystem ist, falls g die Summe der Elemente einer oder mehrerer Klassen der Gruppe von K/k bedeutet. Dabei ist $a_{\sigma, \tau}^g = \prod_{\nu \text{ aus } g} a_{\sigma, \tau}$ gesetzt. Schreibt man noch $\prod_{\nu \text{ aus } g} a_{\nu, \sigma, \tau} = a_{g, \sigma, \tau}$ usw., so rechnet man unter Benutzung der Assoziativregel die Gleichungen

$$a_{\sigma, \tau}^g \cdot \frac{a_{\sigma\tau, g}}{a_{\sigma, g} a_{\tau, g}} = \frac{a_{\sigma, \tau g}}{a_{\sigma, g}} = \frac{a_{\sigma g, \tau}}{a_{g, \tau}} = a_{\sigma, \tau}^g \cdot \frac{a_{g, \sigma\tau}}{a_{g, \sigma} a_{g, \tau}^g}$$

aus, aus denen die Algebrenäquivalenz $(a_{\sigma, \tau}^g, K) \sim (a_{\sigma, \tau}, K)^g$ folgt. Es sei jetzt g ein Normalteiler der Gruppe \mathfrak{G} von K/k ; \bar{k} der Invariantenkörper von g . Aus jeder Restklasse σg werde ein fester Vertreter $\bar{\sigma}$ ausgewählt. Setzt man

$$b_{\sigma, \tau} = a_{\sigma, \tau}^g \cdot \frac{a_{\sigma, \tau, g}}{a_{\sigma, g} a_{\tau, g}^g} \cdot \frac{a_{\bar{\sigma}, \bar{\tau}} a_{\bar{\sigma}, \bar{\tau}}^g}{a_{\bar{\sigma}, \bar{\sigma}} a_{\bar{\tau}, \bar{\tau}}^g},$$

so kann man aus den obigen Gleichungen

$$b_{\sigma, \tau} = b_{\bar{\sigma}, \bar{\tau}} = a_{\bar{\sigma}, \bar{\tau}}^g \frac{a_{\bar{\sigma}, \bar{\tau}}}{a_{\bar{\sigma}, \bar{\sigma}} a_{\bar{\tau}, \bar{\tau}}^g}$$

folgern. Dies bedeutet nach Sätzen über verschränkte Produkte (vgl. etwa Deuring, Algebren, Ergeb. d. Math. IV, 1, S. 52) die Äquivalenz

$$(a_{\sigma, \tau}, K)^g \sim \left(a_{\bar{\sigma}, \bar{\tau}}^g \frac{a_{\bar{\sigma}, \bar{\tau}}}{a_{\bar{\sigma}, \bar{\sigma}} a_{\bar{\tau}, \bar{\tau}}^g}, \bar{k} \right).$$

Können die $\bar{\sigma}$ so gewählt werden, daß sie selbst eine Gruppe bilden, so wird also $(a_{\sigma, \tau}, K)^g \sim (a_{\bar{\sigma}, \bar{\tau}}^g, \bar{k})$. Das tritt im besonderen dann ein, wenn g direkter Faktor von \mathfrak{G} ist, und für diesen Fall wurde die letzte Äquivalenz schon von Chevalley bewiesen [C. Chevalley, La theorie du symbol de restes normiques, J. reine angew. Math. 169, 147 (1933); dies. Zbl. 6, 292].

Deuring (Leipzig).

Moessner, Alfred: Die Gleichung $A_1^n + A_2^n + \dots + A_z^n = B_1^n + B_2^n + \dots + B_z^n$, $n = 1, 2, \dots, 8$, und verwandte Formen. Tôhoku Math. J. 41, 151—155 (1935).

Ist $a + b = c$, so ist $A_1 = sa - bx$, $A_2 = sb + cx$, $A_3 = -sc - ax$, $B_1 = sb - ax$, $B_2 = -sc - bx$, $B_3 = sa + cx$ eine Lösung für $n = 1, 2, 4$. Dann ist $A'_1 = t - A_3$, $A'_2 = t - A_2$, $A'_3 = t - A_1$, $A'_4 = t + A_1$, $A'_5 = t + A_2$, $A'_6 = t + A_3$, $B'_1 = t - B_3$ usw. eine Lösung für $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Weiter ist $A'_1, A'_2, \dots, A'_6, B'_1 + T, B'_2 + T, \dots, B'_6 + T; A'_1 + T, A'_2 + T, \dots, A'_6 + T, B'_1, B'_2, \dots, B'_6$ eine Lösung für $n = 1, 2, \dots, 6$. So kann man weitergehen (dies. Zbl. 9, 54, 245; 10, 196). N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Suryanarayana, M.: Positive determinants of binary quadratic forms whose class-number is 2. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 2, 178—179 (1935).

This paper contains a list of positive prime determinants [$\equiv 3(4)$] of binary quadratic forms whose class-number is 2.

Autoreferat.

Gupta, Hansraj: On a theorem of Gauss. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 118—120 (1935).

In this paper the author gives a proof of Gauss' generalization of Wilson's theorem: The product of the positive integers $< n$ and prime to n is congruent modulo n to -1 if $n = 4, p^\mu$ or $2p^\mu$ (p an odd prime), but is congruent to 1 in all other cases. The proof, which is rather lengthy, is made to follow from divisibility properties of the elementary symmetric functions of $1, 2, 3, \dots, n$. D. H. Lehmer (Bethlehem, Pa.).

Gupta, Hansraj: On the p -potency of $G(p^\mu - 1, r)$. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 2, 199—202 (1935).

Let $G(n, r)$ denote the sum of the products r at a time of the first n natural numbers. The author proves some results concerning the exact power $\omega(r)$ of p which divides $G(p^\mu - 1, r)$ for certain values of r , e.g. $\omega(p(p^\lambda)) = u - \lambda$ for $0 < \lambda \leq u$. See this Zbl. 10, 389 for a previous paper.

Davenport (Cambridge).

Erdős, Paul: On the normal number of prime factors of $p-1$ and some related problems concerning Euler's φ -function. Quart. J. Math., Oxford Ser. 6, 205—213 (1935).

The main results of this paper are as follows. I. The normal number of (different) prime factors of $p-1$ (where p is a prime) is $\log \log p$, i.e. if $\varepsilon > 0$ is given, then for all but $o(n/\log n)$ primes $p \leq n$, the number of prime factors of $p-1$ lies between $(1-\varepsilon) \log \log p$ and $(1+\varepsilon) \log \log p$. II. The number of integers $m \leq n$ which are representable as $\varphi(m')$ (where φ is Euler's function) is $O(n(\log n)^{\varepsilon-1})$, for any $\varepsilon > 0$. III. There exist infinitely many integers m which are representable as $\varphi(m')$ in more than m^C ways, where C is an absolute constant. — For the proof of I, an upper bound

for the number of primes $p \leq n$ for which $(p-1)/a$ is a prime is obtained by Brun's method, and from it is deduced an upper bound for the number of primes $p \leq n$ for which $p-1$ has exactly k prime factors. — For II, the author succeeds in dividing the integers m' with $\varphi(m') \leq n$ into two classes, in such a way that the first class contains only $O(n/(\log n)^{e-1})$ numbers m' , and that for the second class $\varphi(m')$ has at least $20 \log \log n$ prime factors and so can be shewn to assume only $o(n/\log n)$ different values. — The proof of III cannot be summarised here. Davenport.

Brun, Viggo: Umkehrprobleme. Avh. Norges Tekn. Høiskole Jubil.-Bd., 1—14 (1935).

Für die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen $\leq x$ gilt $y = \pi(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu(r)}{r} J\left(x^{\frac{1}{r}}\right)$, wo
 $f(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \zeta(ns)}{n!} x^{ns}$ (H. von Koch, Acta math. 24). Daher ist es vielleicht

möglich, $\pi(x)$ durch eine Potenzreihe beliebig gut anzunähern. Will man die inverse Funktion von $y = \pi(x)$, für die n -te Primzahl, studieren, so kann man die Morgan Wardsche Auflösung (Rend. Circ. mat. Palermo 54, 42) des Umkehrproblems benutzen. Hieraus leitet Verf. eine Annäherungsformel ab, aus welcher sich dann sein Algorithmus für die Berechnung der n -ten Primzahl ergibt (dies. Zbl. 3, 149). — Aus einer Formel von R. Hoppe für die n -te Ableitung einer zusammengesetzten Funktion wird mit Benutzung einer wenig beachteten Bemerkung von Liouville eine Formel abgeleitet zur Integration einer solchen Funktion. N. G. W. H. Beeger.

Chowla, S.: A theorem on sums of powers with applications to the additive theory of numbers. III. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 1, 930 (1935).

Remarks are made on the size of $v(k)$. (II. see this Zbl. 11, 296.) G. Pall.

Vinogradoff, I. M.: A new variant of the demonstration of Waring's theorem. Trav. Inst. math. Stekloff 9, 5—15 (1935) [Russisch].

The present modification of Vinogradoff's method uses Weyl's approximation, and obtains $G(n) \leq 2[n(n-2) \log 2 + 2n]$. (This Zbl. 10, 9, 391; 11, 8.)

G. Pall (Montreal).

Vinogradoff, I. M.: On some rational approximations. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 3—6 (1935).

Verf. verfeinert die Methode, die er in einer vorigen Arbeit (vgl. dies. Zbl. 11, 296) entwickelt hat, um den Ausdruck $\alpha uv - \beta - m$ der Null anzunähern: $|\alpha uv - \beta - m| < Lq^{-\delta}$, wobei β eine im voraus gegebene reelle Zahl ist, m eine ganze rationale Zahl, $q \geq q_0$ und L konstante Zahlen bezeichnen und α, u, v, δ Zahlen sind, die in komplizierter Weise definiert sind. Lubelski (Warschau).

Vinogradoff, I. M.: The number of lattice points in a sphere. Trav. Inst. math. Stekloff 9, 17—38 (1935) [Russisch].

The author had indicated a method (this Zbl. 10, 9) to reduce the order of the remainder term in the asymptotic formula for the number of lattice points in certain volumes. For the case of a sphere of radius a the details are given here to obtain the formula $\frac{4}{3}\pi a^3 + O(a^{1.4+\epsilon})$. Weyl's method is not required. Pall (Montreal).

Mahler, Kurt: On the lattice points on curves of genus 1. Proc. London Math. Soc., II. s. 39, 431—466 (1935).

Let $A(k)$ denote the number of integer solutions (x, y) of $F(x, y) = k$, where F is a binary cubic with integral coefficients and no multiple factors. It is known that $A(k) = 0$ for nearly all integers k . The author shows that $A(k) \geq \sqrt[4]{\log k}$ for infinitely many k . The curve $C, F(x, y) = 1$, is uniformized in $x = \varphi(u), y = \psi(u)$, where φ and ψ are elliptic functions; starting with any point u a series of points $u_{3h+1} = (3h+1)u$ ($h=0, \pm 1, \dots$) is constructed, and it is shown that u can be chosen so that the first $2n$ of these points are unequal and finite, not on the asymptotes of C , nor on the lines joining the origin to those points u for which the like series includes

equal or infinite points. Choose a lattice point (x_1, y_1) not on these lines, set $k_1 = F(x_1, y_1)$, let u be the point of intersection of C and $x_1 y = y_1 x$. The corresponding series of $2n$ points on $F(x, y) = k$, are then seen to be rational and unequal, and the magnitude of their denominators is studied to yield the above-stated result, on multiplying up by a common denominator. A generalization is given to lattice points within an angle about the origin. Corollaries: for any a, k can be chosen so that $ax^4 + kx$ is a perfect square for arbitrarily many integers x ; and similarly for $ax^3 + k$ as either a square or cube; there are infinitely many integers k having more than $\sqrt[4]{\log k}$ representations as a sum of two positive integral cubes; and similarly for $xy(x+y)$. An extension is made to $f(x, y) + \lambda g(x, y) = 0$, where $f = 0$ is of genus 1, g of degree ≤ 3 , both having rational coefficients: there is a rational λ as small as we please for which this curve has at least t finite rational points. There exist cubic curves of the form $Ay^2 + Bx^3 + Cx + D = 0$ with any desired rational value for the invariant J and containing as many lattice points as we please. For any polynomial $f(x)$ of degree 3 or 4, with rational coefficients, there exists an integer $k \neq 0$ such that $kf(x)$ is a perfect square for arbitrarily many rational x . Polynomials $ax^2 + b$ exist which are cubes, or fourth powers, arbitrarily often. A similar application is made to curves of genus 1 in three dimensions, of the type

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = k, \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = K. \quad G. Pall.$$

Wilczyński, Stanisław: Contribution à la méthode d'évaluation des racines carrées des nombres naturels. *Wiedom. mat.* 39, 147—172 (1935) [Polnisch].

Es werden zuerst Näherungswerte h_n von \sqrt{D} , $D = [D] > 0$ mittels der Rekursions-

formel $h_{n-1} + \frac{D}{h_{n-1}}$ ($h_0 = [\sqrt{D}]$) berechnet und das Bestehen der „Fundamentalgleichung“ $h_n = R_m$ untersucht, wobei R_m die Näherungswerte der Kettenbruchentwicklung von \sqrt{D} bezeichnet. Sodann werden die Arten der Mengen n , für die $h_n = R_m$ besteht, ausgesondert und eine Methode geboten, mittels deren man einer Zahl D die ihr entsprechende Mengenart zuschreiben kann. Für eine gewisse Zahlenklasse wird der funktionelle Zusammenhang zwischen den Indizes n und m festgelegt.

Lubelski (Warschau).

Kroukovski, B. V.: Sur les nombres semblables aux nombres Bernoulliens et Eulériens. Les nombres pseudo-contangentiels. *J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine* Nr 1, 43—61 u. franz. Zusammenfassung 62 (1934) [Ukrainisch].

Für die Koeffizienten A_n von $\frac{\cosh x}{1 - \sinh x} = \sum A_n x^n$ stellt Verf. effektive rekurrente Formeln dar. Ferner findet Verf. den Zusammenhang dieser Zahlen mit den Bernoulliischen, pseudo-Eulerschen und pseudo-Bernoulliischen Zahlen. Schließlich weist Verf. auf zahlentheoretische Eigenschaften dieser Zahlen hin. *Lubelski* (Warschau).

Lehmer, D. H.: Lacunary recurrence formulas for the numbers of Bernoulli and Euler. *Ann. of Math.*, II. s. 36, 637—649 (1935).

Der zweite Fall des letzten Fermatschen Satzes führt zu der Frage nach der Teilbarkeit der Bernoulliischen Zahlen durch eine gegebene Primzahl. Weil unsere Kenntnisse dieser Teilbarkeit noch sehr beschränkt sind, kann es nützlich sein, die Reihe der B -Zahlen weiter zu berechnen, als dies bisher geschehen ist. Zu diesem Zwecke stellt Verf. rekurrierende Formeln auf, die Lücken von je 4, 6, 8, 12 Gliedern enthalten. Am zweckmäßigsten erweist sich eine solche mit Lücken von 12 Gliedern. Es sei ε eine pr -te und η eine pq -te Einheitswurzel;

$$\sigma_n(p, q, r, s, t) = \sum_{\eta} (\eta_1 \eta_2 \dots \eta_{s-1})^t (1 + \eta_1 \varepsilon + \dots \eta_{s-1} \varepsilon^{s-1})^n$$

und jedes η_i durchläuft alle Zahlen $1, \eta, \eta^2, \dots, \eta^{p^q-1}$. Satz: $\sigma_{kpq-rt}(p, q, r, s, t) = 0$ falls $kq \not\equiv 0 \pmod{r}$. Für die B -Zahlen gilt die bekannte symbolische Gleichung

$(B+1)^n - B^n = 0$ und $\{2B + (1+x)\}^n - \{2B - (1-x)\}^n = 2n(x-1)^{n-1}$. Nach Entwicklung der Potenzen setzt man für x nacheinander $x_0, x_1, \dots, x_{[1/2]n}$ und summiert; dann setzt man y_0, y_1, \dots statt x_0, x_1, \dots und multipliziert mit $(-1)^n$. In der Summe beider Ergebnisse wird weiter substituiert $x_j = \varepsilon + \eta_2 \varepsilon^2 + \dots + \eta_{r-1} \varepsilon^{r-1}$, $y_j = -\varepsilon + \eta_2 \varepsilon^2 + \dots + \eta_{r-1} \varepsilon^{r-1}$. Dann kann man die Funktion σ einführen und den Satz benutzen. Die Berechnung von B_{196} mit der Formel mit Lücken von je 12 Gliedern wird erläutert. In derselben Weise werden die Eulerschen und Genocchischen Zahlen behandelt.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Hölder, Otto: Verallgemeinerung einer Formel von Hacks. Math. Z. 40, 463—468 (1935).

Es sei $z = f(y)$ eine in $\alpha \leq y \leq \alpha'$ reelle Funktion. $g(z)$, $\beta \leq z \leq \beta'$, $\beta = f(\alpha)$, $\beta' = f(\alpha')$ ihre Umkehrung. Verf. beweist, daß die Methode, die er auf beständig abnehmendes $z = f(y)$ angewendet hat [vgl. Math. Z. 38, 476—482 (1934); dies. Zbl. 8, 296] auch auf beständig zunehmendes $f(y)$ übertragen werden kann. Damit erhält Verf. die folgende Verallgemeinerung einer Hacksschen Formel

$$\sum_{\alpha < a \leq \alpha'} \varphi(a) \Psi(f(a)) + \sum_{\beta < b \leq \beta'} \psi(b) \Phi(g(b)) = \Phi(\alpha') \Psi(f(\alpha')) - \Phi(\alpha) \Psi(f(\alpha)) + \sum_{b=f(a), \alpha < a \leq \alpha'} \varphi(a) \psi(b),$$

wobei $a = a_n \rightarrow \infty$, $b = b_n \rightarrow \infty$ monoton wachsende, voneinander unabhängig reelle Folgen bezeichnen; $\varphi(a)$, $\varphi(b)$; $\psi(a)$, $\psi(b)$ sind zugeordnete Funktionen und $\Phi(x) = \sum_{a \leq x} \varphi(a)$, $\Psi(x) = \sum_{b \leq x} \psi(b)$. Für $y = f(z) = z$, $\varphi(n) = \psi(n) = \lambda(n)$, $L(x) = \sum_{n \leq x} \lambda(n)$, $\alpha = 0$, $\alpha' = x > 0$, wo $\lambda(n)$ die Liouvillesche Funktion bezeichnet, erhält Verf. als Beispiel die Formel $2 \sum_{n \leq x} \lambda(n) L(n) = (L(x))^2 + [x]$.

Lubelski (Warschau).

Gruppentheorie.

Baer, Reinhold: The decomposition of enumerable, primary, abelian groups into direct summands. Quart. J. Math., Oxford Ser. 6, 217—221 (1935).

Erstmalig durch die Arbeit des Ref. (Math. Ann. 107, 774—803; dies. Zbl. 6, 150) — nach deren Kenntnis auch von L. Zippin (Ann. of Math. 36, 86—99; dies. Zbl. 11, 104) — wurde ein vollständiger Überblick über die abzählbar-unendlichen abelschen Gruppen mit Elementen endlicher Ordnung gegeben, d. h. sie wurden durch Angabe gewisser Invarianten eindeutig charakterisiert, und es wurde gezeigt, daß zu einem jeden solchen Invariantensystem eine Gruppe existiert. — Ist eine solche Gruppe \mathfrak{A} direkte Summe von Untergruppen \mathfrak{A}_i , so gibt Verf. notwendige und hinreichende Bedingungen für die Invarianten der Untergruppen \mathfrak{A}_i dieser direkten Zerlegung an. Ferner gibt Verf. notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß eine solche Gruppe \mathfrak{A} in direkt unzerlegbare Summanden zerlegbar ist und dafür, daß zwei direkte Zerlegungen der Gruppe \mathfrak{A} sich so „verfeinern“ lassen, daß die direkten Summanden der verfeinerten Zerlegungen isomorph aufeinander bezogen werden können. — Die Resultate dieser Arbeit sind nicht neu, sondern enthalten in Satz 11 und dem letzten Absatz S. 802 der oben zit. Arbeit vom Ref. Ulm (Münster i. W.).

Baer, Reinhold: The decomposition of abelian groups into direct summands. Quart. J. Math., Oxford Ser. 6, 222—232 (1935).

In dieser Note wird gezeigt, daß, wenn eine abelsche Gruppe \mathfrak{A} direkte Summe von charakteristischen Untergruppen \mathfrak{A}_i und \mathfrak{A}'_i — das sind solche Untergruppen, die bei jedem Automorphismus auf sich abgebildet werden — und \mathfrak{A}_{ik} der Durchschnitt von \mathfrak{A}_i und \mathfrak{A}'_k ist, \mathfrak{A} direkte Summe der char. Untergruppen \mathfrak{A}_{ik} ist. Es gibt daher höchstens eine direkte Zerlegung von \mathfrak{A} in irreduzible charakteristische Untergruppen. Da zwei Zerlegungen in lediglich direkte Summanden nicht immer so verfeinert werden können, daß die direkten Summanden dieser neuen Zerlegungen isomorph aufeinander bezogen werden können (siehe vorst. Ref.), stellt Verf. zum Schluß ein Kriterium für die Möglichkeit einer solchen Zerlegung auf.

Ulm (Münster i. W.).

Baer, Reinhold: Types of elements and characteristic subgroups of Abelian groups. Proc. London Math. Soc., II. s. **39**, 481—514 (1935).

Verf. untersucht zunächst die Bedingungen dafür, daß zwei Elemente a und b gewisser unendlicher abelscher Gruppen \mathfrak{A} mit Elementen von nur endlicher Ordnung — es wird außerdem verlangt, daß \mathfrak{A} in eine direkte Summe von Zyklen vom Typus p^i ($i = 1, 2, 3, \dots$) und p^∞ zerlegbar ist ($p =$ bel. Primzahl) — durch einen Automorphismus aufeinander abgebildet werden können. Trivialerweise kann man sich — hierbei und in allem folgenden — auf primäre Gruppen beschränken, und bei diesen lassen sich zwei Elemente a und b durch einen eigentlichen Automorphismus dann und nur dann aufeinander abbilden, wenn für jedes n $p^n a$ und $p^n b$ gleichen Ordnungs- und Höhenexponenten (im Sinne von Prüfer) haben. Zwei solche Elemente a und b mögen von gleichem Typus heißen. — Sodann wird eine Aufzählung der charakteristischen Untergruppen, d. h. derjenigen Untergruppen vorgenommen, die bei jedem eigentlichen Automorphismus auf sich selbst abgebildet werden. Jede solche Gruppe wird eindeutig und eindeutig umkehrbar einer Menge von Typen von Elementen zugeordnet, und es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß einer solchen Typenmenge eine char. Untergruppe entspricht. Schließlich werden reguläre char. Untergruppen untersucht, das sind solche, in denen für alle Vielfache eines jeden Elementes der obenerwähnten Typenmenge die Summe von Ordnungs- und Höhenexponent gleich ist. Für eine reguläre char. Untergruppe und nur für diese gilt der Satz, daß sie bei allen eigentlichen und uneigentlichen Automorphismen auf sich abgebildet wird. Zum Schluß werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von irregulären char. Untergruppen aufgestellt, die es übrigens nur im Falle $p = 2$ gibt. Ulm (Münster i. W.).

Baer, Reinhold: Gruppen mit hamiltonischem Kern. Compositio Math. **2**, 241 bis 246 (1935).

Der Kern $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ einer Gruppe \mathfrak{G} ist die größte Untergruppe von \mathfrak{G} , deren Elemente mit allen Untergruppen von \mathfrak{G} vertauschbar sind [s. Baer, Compositio Math. **1**, 254 bis 283 (1934); dies. Zbl. **9**, 155]. $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ist abelsch oder hamiltonisch; der letztere Fall wird hier untersucht, wobei eine wesentliche Rolle die Gruppe $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ spielt, die aus allen Elementen von \mathfrak{G} besteht, die mit jedem Element von $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ vertauschbar sind, dessen Ordnung eine Potenz von 2 ist. $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ ist direktes Produkt zweier Zyklen der Ordnung 2, und zu einer Gruppe \mathfrak{H} existiert dann und nur dann eine Gruppe \mathfrak{G} , so daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ ist, wenn die Elemente von \mathfrak{H} endliche nicht durch 4 teilbare Ordnung haben und das Zentrum von \mathfrak{H} Elemente der Ordnung 2 enthält. Zwei Gruppen $\mathfrak{G}^{(1)}$ und $\mathfrak{G}^{(2)}$ mit hamiltonischem Kern sind dann und nur dann isomorph, wenn $\mathfrak{B}(\mathfrak{G}^{(1)})$ sich so isomorph auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{G}^{(2)})$ abbilden läßt, daß dabei die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}^{(1)})$ in die von $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}^{(2)})$ übergeht. — Ist \mathfrak{G} eine Gruppe von Primzahlpotenzordnung, so ist \mathfrak{G} direktes Produkt einer Quaternionengruppe und einer beliebigen Anzahl von Zyklen der Ordnung 2. Magnus (Frankfurt a. M.).

Brahana, H. R.: Metabelian groups and pencils of bilinear forms. Amer. J. Math. **57**, 645—667 (1935).

In Ausdehnung früherer Untersuchungen [Amer. J. Math. **56**, 490—510 (1934); dies. Zbl. **10**, 153; Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 776—792 (1934); dies. Zbl. **10**, 252] behandelt Verf. Gruppen G , die eine maximale invariante Abelsche Untergruppe H der Ordnung p^n , p Primzahl, vom Typ $1, 1, \dots, 1$ besitzen derart, daß $U = G/H$ eine Abelsche Gruppe der Ordnung p^4 vom Typ $1, 1, 1, 1$ ist. Jedem Element von U entspricht ein Isomorphismus von H und daher eine Matrix n -ten Grades im Galoisfeld $GF(p)$. Die charakteristischen Wurzeln sind alle 1. Entsprechend der Zerfällung in unzerfällbare Bestandteile erhält man eine Zerlegung $n = \sum n_i$. Ist G nun metabelsch (darunter versteht Verf. eine Gruppe, für die die Faktorgruppe nach dem Zentrum Abelsch ist — abweichend von der sonst meist üblichen Bezeichnung), so sind alle $n_i \leq 2$. Es wird dann eine genaue Klassifikation der Gruppen gegeben,

für die für alle von der Identität verschiedenen Elemente von U entweder nur ein n_i oder nur zwei n_i den Wert 2 haben, die übrigen also 1 sind, und die wirklich Elemente der zweiten Art enthalten. Die Aufgabe ist äquivalent mit der Klassifikation gewisser Büschel von Bilinearformen mit Koeffizienten aus $GF(p)$ bei linearer Transformation der beiden Variablenreihen und der Büschelparameter. *R. Brauer.*

Brahana, H. R.: Metabelian groups and trilinear forms. Duke math. J. **1**, 185—197 (1935).

In weiterer Ausführung früherer Untersuchungen (vgl. das vorst. Ref.) stellt Verf. einen Zusammenhang zwischen gewissen Klassen metabelscher Gruppen und trilinearen Formen mit Koeffizienten aus einem Galoisfeld her und diskutiert die gegenseitigen Beziehungen. *R. Brauer (Toronto).*

Tazawa, Masatada: Remarks on Frobenius' and Kulakoff's theorems on p -groups. II. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. **24**, 161—163 (1935).

Für die in einer früheren Arbeit des Autors [Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. **23**, 449—476 (1934); dies. Zbl. **10**, 343; vgl. das dortige Referat] behandelten speziellen p -Gruppen G der Ordnung p^n wird nunmehr gezeigt, daß die Anzahl der Untergruppen der Ordnung p^m für $m < 1 < n - 1$ immer dann $\equiv 1 + p + 2p^2 \pmod{p^3}$ ist, wenn G keine Untergruppe der Ordnung p^4 von einem bestimmten Typ enthält.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Dietzmann, A. P., und A. A. Kulakov: Einige Kriterien der Nichteinfachheit endlicher Gruppen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **3**, 11—12 (1935).

Einige Bedingungen, unter denen eine endliche Gruppe mindestens einen nicht-trivialen Normalteiler besitzt. Eine der allgemeinsten von diesen ist folgende: Eine Gruppe G ist nicht einfach, wenn man in G zwei solche von G verschiedene, gleichmächtige Systeme S, S' von Elementen und einen solchen invarianten Komplex R (= eine Teilmenge von G , die mit jedem a auch alle $g^{-1}ag$ enthält) finden kann, daß das Produkt SR nur Elemente von S' enthält. *A. Kurosch (Moskau).*

Miller, G. A.: Groups in which the squares generate a subgroup of index less than seven. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21**, 523—525 (1935).

Denjoy, Arnaud: Sur les groupes de substitutions homographiques. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 468—470 (1935).

G ist eine unendliche Gruppe von linear gebrochenen Substitutionen einer komplexen Veränderlichen x

$$S(x) = \frac{Ax + B}{Cx + D}, \quad AD - BC \neq 0,$$

$G(x)$ die Menge aller Punkte $S(x)$ und $G'(x)$ die Menge aller Häufungspunkte der Punkte $S(x)$; ein Punkt $S(x)$ wird auch dann zu $G'(x)$ gezählt, wenn er bei unendlich vielen Substitutionen von G fest bleibt. Im allgemeinen hängt $G'(x)$ von x ab. Ein Punkt, der bei allen S von G fest bleibt, heißt fundamental für G . Eine Substitution $\frac{A'x + B'}{C'x + D'}$ heißt Häufungssubstitution für G , wenn das Koeffizientensystem (A', B', C', D') Grenzwert einer Folge von Koeffizientensystemen (A, B, C, D) aus G und überdies $A'D' - B'C' \neq 0$ ist. $G'(x)$ ändert sich nicht, wenn man die Häufungssubstitutionen von G zu G hinzufügt. Wenn G mindestens eine Häufungssubstitution besitzt, so ist jede Substitution von G Häufungssubstitution von G , und für jedes nicht für G fundamentale x ist $G(x)$ in sich dicht. Nun gelten die folgenden Sätze: Wenn G keine Häufungssubstitution besitzt und x alle nichtfundamentalen Punkte durchläuft, hängt $G'(x)$ nicht von x ab. — Wenn für ein nichtfundamentales x die Menge $G(x)$ aus isolierten Punkten besteht, so gibt es eine Menge E , die im allgemeinen Fall perfekt und nirgends dicht ist und sich in speziellen Fällen auf 2 gleiche oder verschiedene für G fundamentale Punkte reduziert, so daß $E = G'(x)$ für jedes nichtfundamentale x ; dabei besteht $G(x)$ für jedes nicht zu E gehörige x aus isolierten Punkten und bildet für jedes zu E gehörige x eine in E gelegene und in E überall dichte Menge. *Jakob Nielsen.*

Seidel, W.: On a metric property of Fuchsian groups. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21, 475—478 (1935).

Let Γ be a Fuchsian group with principal circle, E , $|z| = 1$. The group Γ is m. t. (metrically transitive) on E if any set measurable of points on E and invariant under Γ is either of measure 0 or 2π . With the aid of Fatou's theorem and the Poisson integral it is shown that a necessary and sufficient condition for Γ to be m. t. on E is that every bounded harmonic function defined in $|z| < 1$ and automorphic with respect to Γ shall be identically constant. From this it follows at once that any group Γ for which a fundamental domain together with its boundary lies interior to E is m. t. on E . Groups for which this property of a fundamental region does not hold, yet which are m. t. on E , and groups which are transitive but not m. t. on E are displayed by removing a closed bounded set, Σ , from the complex plane and mapping the universal covering surface of the region thus obtained conformally onto the interior of the unit circle. The first case is obtained if Σ has transfinite diameter zero, the second if every neighborhood of every point of Σ contains a subset of Σ of positive transfinite diameter and Σ has no connected subsets.

G. A. Hedlund (Bryn Mawr).

Analysis.

Montel, Paul: Sur une formule de Weierstrass. C. R. Acad. Sci., Paris 201, 322—324 (1935).

Dans un travail antérieur [Ann. R. Scuole norm. di Pisa, II. s. 1, 371—384 (1932); ce Zbl. 5, 290] l'auteur avait établi la formule suivante:

$$Q(z_0, z_1, \dots, z_n) = \frac{Z_n}{n!}, \quad (1)$$

où $Q(z_0, z_1, \dots, z_n)$ désigne la $n^{\text{ème}}$ différence divisée pour les points z_0, z_1, \dots, z_n d'une fonction $f(z)$ holomorphe dans le polygone de convexité (II) de ces points (et sur sa frontière); Z_n est l'affixe d'un point du domaine de convexité de l'ensemble F_n des valeurs de $f^{(n)}(z)$ lorsque z décrit le polygone de convexité (II). En supposant $z_1 = z_2 = \dots = z_n$ l'auteur étend ainsi la formule de Weierstrass (et ensuite, comme conséquence, celle de Darboux) au cas de la formule de Taylor, et donne quelques nouvelles applications de la formule (1). En particulier, il résulte de (1) que le polygone (II) contient un point ξ tel que

$$R[Q(z_0, z_1, \dots, z_n)] = R\left[\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\right],$$

ce que M. Ozaki avait obtenu par une autre voie [Science Report of the Tokyo Bunrika Daigaku 2, A, 167—188 (1935); ce Zbl. 12, 24]. S. Bernstein (Leningrad).

● Whittaker, J. M.: Interpolatory function theory. (Cambridge tracts in math. a. math. phys. Edited by G. H. Hardy a. E. Cunningham. Nr. 33.) London: Cambridge univ. press 1935. 107 pag. 6/6.

Cette belle monographie réunit un certain nombre des résultats obtenus depuis quelques dernières années dans le domaine de l'interpolation des fonctions analytiques; le sujet n'étant que trop vaste, le choix des questions traitées est naturellement déterminé par la direction des travaux antérieurs de l'auteur. — Le chap. I est consacré à l'exposition de la théorie générale des suites fondamentales (basic sets) des polynômes (Quart J. Math. 5, 224—239; ce Zbl. 9, 342); une nouvelle classification des suites fondamentales est indiquée, d'après laquelle toute fonction entière d'ordre inférieur à $\frac{1}{\omega}$ ou d'ordre $\frac{1}{\omega}$ et de type ($=$ degré) inférieur à $\frac{1}{\gamma}$ (condition suffisante) est développable suivant les polynômes d'une suite d'ordre ω et de type γ . — Les polynômes de Bernoulli (chap. II) présentent un exemple simple de suites fondamentales, l'ordre 1 et le type $\frac{1}{2\pi}$ se laissant déterminer sans peine. Ensuite, l'équation $g(z+1) - g(z) = f(z)$ est étudiée, les résultats classiques étant précisés en ce sens qu'il existe une solution $g(z)$ de cette équation de même ordre que la fonction

entière $f(z)$ donnée (Proc. Edinburgh Math. Soc. 3, 241—258; 4, 77—78; ce Zbl. 10, 308—309); dans le cas où la fonction $f(z)$ est méromorphe, d'ordre ρ , l'ordre de la solution $g(z)$ peut être choisi non supérieur à $\rho + 1$, cette limite ne pouvant pas toujours être abaissée (J. London Math. Soc. 8, 62—69; ce Zbl. 6, 316; voir aussi un article à paraître dans les Proc. London Math. Soc.). — Le chap. III concerne les travaux relatifs aux dérivées successives (G. Pólya, Math. Z. 12, 36—60; W. Gontcharoff, Ann. École norm. 47, 1—78). On trouve ici une démonstration élémentaire d'un théorème de Gontcharoff (l. c. p. 35), précisé par S. Takenaka (Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. 14, 529—542; ce Zbl. 6, 63); enfin, une étude des séries de G. J. Lidstone (Proc. Edinburgh Math. Soc. 2, 16—19; cf. H. Poritsky, Trans. Amer. Math. Soc. 34; ce Zbl. 4, 343). — Dans le chap. IV, la série de Newton

$$f(z) \sim f(0) + \sum_1^{\infty} \frac{A_n f(0)}{n!} z(z-1) \dots (z-n+1) \quad (*)$$

est traitée par des méthodes plus sommaires que celles de N. E. Nörlund, sans qu'il y ait question de l'indicatrice de la croissance. Il est à regretter qu'un travail important de A. Gelfond [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. (6) 11], consacré à l'étude des séries généralisées de Newton, ni celui de G. Faber (Math. Ann. 70, 48—68), n'est pas mentionné. La théorie de la série „cardinale“ (suivant la terminologie anglaise)

$$f(z) \sim \frac{\sin \pi z}{\pi} \left[\frac{f(0)}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{f(n)}{z-n} + \frac{f(-n)}{z+n} \right) \right] \quad (**)$$

est exposée avec de nouvelles extensions et précisions; à noter un théorème relatif à la „consistance“ (v. W. L. Ferrar, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 45—47) de cette série, ainsi qu'une généralisation des rapports connus entre les séries (*) et (**) au cas où les points d'interpolation sont donnés par la suite $\pm c_1, \pm c_2, \pm c_3, \dots$ ($c_{n+1} > c_n, c_n \rightarrow \infty$). — Dans le chap. V, il s'agit du système des points d'interpolation $z = m + ni$ (m et n entiers quelconques); l'hypothèse de M. Littlewood concernant les fonctions entières bornées dans ces points est démontrée par la méthode originelle de l'auteur (Proc. Edinburgh Math. Soc. 2, 111—128; Proc. London Math. Soc. 37, 383—401; ce Zbl. 9, 216) ainsi que par la méthode de M. Pólya (Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 43, 67—69). — Le dernier chap. VI traite les „périodes asymptotiques“ des fonctions entières et méromorphes: ainsi s'appelle tout nombre ω tel que l'ordre de $f(z + \omega) - f(z)$ est inférieur à l'ordre de $f(z)$. Les résultats antérieurs de l'auteur relatifs à l'ensemble des périodes asymptotiques (Proc. Edinburgh Math. Soc. 3, 241—258; ce Zbl. 10, 308; Quart. J. Math. 5, 34—42; ce Zbl. 9, 25) sont ici considérablement complétés.

W. Gontcharoff (Moscou).

Sheffer, I. M.: Concerning some methods of best approximation, and a theorem of Birkhoff. Amer. J. Math. 57, 587—614 (1935).

Soit (C) une courbe de Jordan, fermée, rectifiable, (D) le domaine intérieur, (E) le domaine extérieur à (C) , l la longueur de (C) . On suppose que deux suites de fonctions associées 1° $u_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), régulières dans (D) et continues sur $(D) + (C)$ et 2° $L_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), continues sur (C) , jouissent de la propriété suivante: la fonction $\frac{1}{t-x}$ possède le développement $\sum_0^{\infty} L_n(t) u_n(x)$, qui est uniformément convergent tant que t est sur (C) et x dans un domaine fermé quelconque intérieur à (D) . Il s'ensuit, bien entendu, que l'on a, dans (D) :

$$f(x) = \sum_0^{\infty} f_n u_n(x), \quad f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} f(t) L_n(t) dt,$$

$f(x)$ étant une fonction régulière dans (D) et continue sur $(D) + (C)$. — Il s'agit de reconnaître si un développement analogue $f(x) = \sum_0^{\infty} \varphi_n v_n(x)$ est possible, étant admis que les fonctions $v_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), régulières dans (D) et continues sur $(D) + (C)$, sont „suffisamment voisines“ des fonctions $u_n(x)$. En posant

$$K(x, t) = \sum_0^{\infty} [v_n(x) - u_n(x)] L_n(t),$$

cette dernière série étant uniformément convergente pour x se trouvant dans $(D) + (C)$ et t sur (C) , il se trouve que la condition $|K(x, t)| < \frac{2\pi}{l}$, suffit pour que la question

posée ait une réponse affirmative. Les coefficients φ_n sont donnés par les formules

$$\varphi_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} f(t) M_n(t) dt,$$

où les fonctions $M_n(t)$ se définissent par les équations intégrales

$$L_n(t) = M_n(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} K(w, t) M_n(w) dw.$$

Réciproquement, on obtient:

$$M_n(t) = L_n(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} H(w, t) L_n(w) dw,$$

où l'on a posé

$$H(x, t) = \sum_0^\infty [u_n(x) - v_n(x)] M_n(t).$$

Les fonctions $L_n(t)$ et $M_n(t)$ se laissent prolonger à l'extérieur de la courbe (C) , et on établit les développements valables dans (E) quelle que soit la fonction $f(z)$, régulière dans (E) et continue sur $(E) + (C)$:

$$f(z) - f(\infty) = \sum_0^\infty \alpha_n L_n(z), \quad \alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} f(t) u_n(t) dt,$$

$$f(z) - f(\infty) = \sum_0^\infty \beta_n M_n(z), \quad \beta_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} f(t) v_n(t) dt.$$

L'hypothèse supplémentaire concernant l'unicité des développements de la forme

$\sum_0^\infty c_n u_n(x)$ dans (D) permet d'obtenir les relations de biorthogonalité

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} u_m(t) L_n(t) dt = \varepsilon_{mn}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} v_m(t) M_n(t) dt = \varepsilon_{mn}$$

($\varepsilon_{mn} = 0$ ou 1 suivant que $m \neq n$ ou $m = n$).

On revient au cas de Birkhoff (C. R. Acad. Sci., Paris 164, 942—945) en admettant

que (C) est le cercle-unité, $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $L_n(t) = \frac{n!}{t^{n+1}}$. — Un autre résultat, que l'on

trouve dans ce travail si riche en idées, concerne le théorème de D. V. Widder (Trans. Amer. Math. Soc. 31, 43—52), d'après lequel une fonction $f(x)$, régulière dans le cercle-

unité, se laisse développer en une série de la forme $\sum_0^\infty f_n \Omega_n(x)$, les fonctions

$$\Omega_n(x) \equiv \frac{x^n}{n!} (1 + h_n(x)),$$

régulières dans le cercle-unité, étant données d'avance. M. Sheffer fait voir que la

condition suffisante de M. Widder $|h_n(x)| \leq \frac{K}{n+1}$ peut être remplacée par une autre

moins restrictive: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + h_n(x)) = M(x)$, où $M(x)$ est une fonction régulière dans le cercle-unité fermé et ne s'y annulant pas.

W. Gontcharoff (Moscou).

Tartler, A.: On a certain class of orthogonal polynomials. Amer. J. Math. 57, 627 bis 644 (1935).

Let $\psi(x)$ be bounded and non-decreasing in the finite or infinite interval (a, b) ,

such that all moments $\alpha_i = \int_a^b x^i d\psi(x)$ exist ($i = 0, 1, \dots$), with $\alpha_0 > 0$. Consider

the function $\dot{\psi}(x) = \int_a^x (t - \alpha) d\psi(t)$, where the constant α is arbitrarily chosen inside (a, b) . The purpose of the present paper is to study the existence and the properties of the orthonormal sequence of polynomials

$$\{u_n(x; d\dot{\psi}) \equiv u_n \equiv \bar{a}_n x^n + \dots\}, \quad \text{with} \quad \int_a^b u_m u_n d\dot{\psi} = \delta_{mn}, \quad (m, n = 0, 1, \dots)$$

and their relation to the corresponding orthonormal system $\{\varphi_n(x; d\psi) \equiv \varphi_n\}$. Thus it amplifies and extends the results announced by the reviewer [C. R. **191**, 474 (1930)]. It is shown that many — but not all — properties of φ_n hold for u_n . Thus, a recurrence relation exist, of the same type as that satisfied by φ_n :

$$U_n = (x - \bar{c}_n) U_{n-1} - \bar{\lambda}_n U_{n-2}, \quad \left(n \geq 2; \bar{c}_n, \bar{\lambda}_n = \text{const}; U_n \equiv \frac{u_n}{\bar{a}_n} \right)$$

but the $\bar{\lambda}_n$ are not all positive; the Darboux formulae hold here without any modification, etc. A thorough study is made of the zeros $\{\bar{x}_{i,n}\}$ of u_n , in their relation to those of φ_n and to α . The following very general result is important: $\bar{x}_{i,n}$ increases with α , for any real α inside or outside (a, b) . — The author further studies a mechanical quadratures formula employing the zeros $\bar{x}_{i,n}$ and the given constant α as abscissas;

here he get incidentally the important result: $\sum_{i=0}^n \varphi_i^2(\alpha) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). The paper closes with a brief discussion of the orthonormal sequence of polynomials $V_n(x; d\bar{\psi})$, where $\bar{\psi}(x) = \int_a^x (t - \alpha_1)(t - \alpha_2) d\psi(t)$ [$\alpha_{1,2}$ — constants, inside (a, b)].

J. Shohat (Philadelphia).

Widder, D. V.: An application of Laguerre polynomials. Duke math. J. **1**, 126—136 (1935).

Continuing his investigation of the Laplace integral

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} d\alpha(t), \quad (1)$$

the author shows in the present paper its intimate relation to Laguerre polynomials $\{L_n(x)\}$ with the orthonormal relations

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (m, n = 0, 1, \dots). \quad (2)$$

The main point is the introduction of a certain additive operator I , first defined for functions of the form $e^{-x}P(x)$, $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, as follows:

$$I(e^{-x}P(x)) = \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k f^{(k)}(1), \quad f(x) \text{ completely monotonic in } (0, \infty).$$

The domain of operation of I is then slightly extended and applied to the generating function for the sequence $\{L_n(x)\}$. Making use of Szegő's inequality $e^{-\frac{x}{2}} |L_n(x)| \leq 1$ ($x \geq 0$; $n = 0, 1, \dots$), and of Hardy's result

$$\sum_{n=0}^\infty L_n(x) L_n(y) t^n \geq 0, \quad (0 \leq x, y < \infty; 0 \leq t < 1)$$

the author obtains a new proof of the following theorem (due to S. Bernstein and to himself): every completely monotonic in $0 \leq x < \infty$ function $f(x)$ can be represented by the Laplace integral (1) for $x \geq 0$, with $\alpha(t)$ uniformly bounded and non-decreasing in $0 \leq t < \infty$. A further application of the properties of $L_n(x)$ yields an elegant inversion of (1):

$$\alpha(x) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^x L_n(y) dy \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{f^{(k)}(1)}{k!},$$

also a simple integral representation of the above operator I :

$$I(e^{-x}P(x)) = \int_0^\infty e^{-x} P(x) d\alpha(x).$$

J. Shohat (Philadelphia).

Achyèsér, N.: Bemerkungen über extremale Eigenschaften einiger mit der Transformation der elliptischen Funktionen zusammenhängender Brüche. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 11, 27—34 (1935).

Exposé synthétique nouveau des résultats de Zolotareff, Tschebyscheff, Cauchy et de l'auteur concernant quelques problèmes de la théorie de la meilleure approximation relative par des fractions rationnelles dont la solution est fournie par les formules de transformation des fonctions elliptiques. *S. Bernstein* (Leningrad).

Privalov, I.: Sur un problème limite de la théorie des fonctions. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 2, 301—304 u. franz. Zusammenfassung 305 (1935) [Russisch].

The following theorem is established: If $v(z)$ is a subharmonic function in the open sector $\alpha < \arg z < \beta$, $|z| < 1$ and if $\int_{\alpha}^{\beta} v(re^{i\theta}) d\theta = O(1)$, then at almost every point of the arc (α, β) of the unity circle the limit of $v(z)$ exists along any path not touching the arc. This theorem is a generalization of a former theorem concerning the functions subharmonic throughout the whole circle $|z| < 1$. [See Littlewood, Proc. London Math. Soc. (2), 28, 383—394 (1928); Privalov, Rec. math. Soc. math. Moscou 41, 3—9 (1934); this Zbl. 9, 310.] The proof rests on the following lemma: If $v(z)$ is a subharmonic function in an open region D bounded by a rectifiable curve C and if $v^+(z)$ possesses a harmonic majorant in D , then almost everywhere at C the limit of $v(z)$ exists along any path not touching the curve C . *Saks* (Warszawa).

Cannon, E. W., and Aurel Wintner: An asymptotic formula for a class of distribution functions. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 138—143 (1935).

Let $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ be independent random variables each subjected to a distribution law $\sigma(x)$ independent of k and having a finite positive dispersion. It is known that the distribution law $\sigma_n(x)$ of the sum $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ tends to the Gauss law as $n \rightarrow \infty$. The authors show that, under suitable restrictions upon $\sigma(x)$, $\sigma_n(x)$ admits of an asymptotic development of the form $\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} P_{\nu}(x) n^{-\nu/2}$.

Assuming without essential loss of generality that $\sigma(x) + \sigma(-x) = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\sigma(x) = 1$, the restrictions in question reduce to the existence of a positive function $\varphi(t)$ such that for a sufficiently small δ , $\int_{-\infty}^{\infty} \{t\varphi(t)^{1/\delta}\}^{-1} dt < \infty$,

while $L(t; \sigma) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\sigma(x) \rightarrow 0$ and is $O(1/\varphi(t))$ as $t \rightarrow \infty$. These restrictions are wide enough to include various cases of continuous but not absolutely continuous distributions $\sigma(x)$. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Takahashi, Tatsuo: Notes on the Wiener's formula. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 24, 150—160 (1935).

Aus $T \lim_{T \rightarrow \infty} T^{\alpha-1} \int_0^T f(x) dx = A$, $0 \leq \alpha < 1$, folgt $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \varepsilon^{1-\alpha} \int_0^{\infty} f(x) K(\varepsilon x) dx = A \int_0^{\infty} x^{-\alpha} K(x) dx$

falls $K(x)$ stetig und für $x > 1$ nicht größer als $x^{\alpha-2}$ ist, und $T^{\alpha-1} \int_0^T |f(x)| dx$ für alle T beschränkt ist. Für $K(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ stammt der Satz von M. Jacob [J. London Math. Soc. 3 (1928)]. *Bochner* (Princeton).

Izumi, Shin-ichi: On Wiener's proof of Plancherel's theorem. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 24, 55—62 (1935).

A partly simplified version of N. Wiener's argument employing the complete-

ness of the sequence of Hermite functions for the proof of Plancherel's theorem concerning Fourier transforms (this Zbl. 6, 54). *Bochner* (Princeton).

Izumi, Shin-ichi: On the Wiener's formula. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 24, 63—76 (1935).

Aus $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \int_0^x f(\xi) d\xi = A$ folgt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^\infty f(x) K(\varepsilon x) dx = A \int_0^\infty K(x) dx$, falls $\int_{x+1}^x |f(\xi)| d\xi < B$ und $\sum_{n=0}^\infty \max_{n \leq x \leq n+1} |K(x)| < \infty$. — Weitere Sätze dieser Art. *Bochner* (Princeton).

Reihen:

Hardy, G. H.: Some identities satisfied by infinite series. J. London Math. Soc. 10, 217—220 (1935).

Es gelten (vgl. Hardy, Littlewood, Pólya, Inequalities, Theorems 253, 326 bis 328, 331) für reelle $a_n \neq 0$ und für reelles $f(x) \neq 0$ die Ungleichungen

$$\sum b_n^2 < 4 \sum a_n^2, \quad \sum c_n^2 < 4 \sum a_n^2, \quad (1), (2)$$

$$\int_0^\infty g^2 dx < 4 \int_0^\infty f^2 dx, \quad \int_0^\infty h^2 dx < 4 \int_0^\infty f^2 dx; \quad (3), (4)$$

hierbei ist

$$b_n = \frac{A_n}{n+1} = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n+1}, \quad c_n = \frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+2} + \dots,$$

$$g(x) = x^{-1} \int_0^x f(t) dt, \quad h(x) = \int_x^\infty t^{-1} f(t) dt.$$

Verf. zeigt, wie man (4) aus

$$4 \int_0^\infty f^2 dx = \int_0^\infty h^2 dx + \int_0^\infty (2f - h)^2 dx$$

ablesen kann. Indem er nun f und h nach Laguerreschen Polynomen entwickelt, gewinnt er die eigentliche Identität

$$4 \sum a_n^2 = \sum p_n^2 + \sum (2a_n - p_n)^2,$$

$$p_n = 2 \left(\frac{A_n}{n+1} - \frac{A_{n+1}}{n+2} + \dots \right),$$

aus der

$$\sum b_n^2 = 4 \sum a_n^2 - \frac{1}{2} p_0^2 - \sum (2a_n - p_n)^2 - \frac{1}{4} \sum (p_n - p_{n+1})^2,$$

d. h. etwas mehr als (1) folgt. Ferner ergibt sich $\sum p_n^2 < 4 \sum a_n^2$. [Bemerkt sei, daß die letzte Ungleichung, indem man a_n durch A_n ausdrückt und nachher $(-1)^n a_n$ für A_n schreibt, $\sum c_n^2 < \sum (a_n + a_{n-1})^2$, $a_{-1} = 0$, d. h. etwas mehr als (2), liefert.] — Verf. führt endlich eine andere Integralungleichung bzw. Identität an, aus der (2) gefolgert werden kann. *G. Szegő* (St. Louis).

Takagi, Naobumi: On Borel's method of summation. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 24, 45—54 (1935).

M. Sannia a introduit la sommation (B_k) qui généralise ainsi le procédé de Borel (B_0) :

$$(B_k)\text{-lim} \text{gén} s_n = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^\infty \frac{s_n \cdot x^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x). \quad (k \geq 0)$$

La sommabilité (B_g) de la série $\sum w_n$ produit de Cauchy des deux séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ sommables (B_α) et (B_β) respectivement avec les sommes U et V a été étudié par M. Obrechhoff (Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 39—43; ce Zbl. 4, 60) qui a prouvé que l'on a toujours

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f_g(t) dt = (C, 1)\text{-lim} \text{gén} f_g(x) = U \cdot V$$

pour $q = \max(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$. L'auteur a montré que la limite $\lim_{x \rightarrow \infty} f_q(x) = U \cdot V$ existe sous les conditions supplémentaires imposées aux séries-facteurs que voici

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} \cdot \frac{x^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)} = O_L(x^{-1} \cdot e^x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n+1} \cdot \frac{x^{n+\beta-1}}{\Gamma(n+\beta)} \quad (c)$$

Vu que le résultat général d'Obrechhoff concerne les séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ sommables $C_\gamma B_\alpha$ et $C_\delta B_\beta$ il est probable que la condition (c) assure la sommabilité $C_{\gamma+\delta} \cdot B_q$ de la série-produit dans le cas général $\gamma > 0$, $\delta > 0$ avec comme précédemment $q = \max(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$.

E. Kogbetliantz (Téhéran).

Garabedian, H. L.: A convergence factor theorem in the theory of summable series. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 583—592 (1935).

L'auteur compare le procédé classique de sommation dû à M. de la Vallée-Poussin (VP) à celui (φ) défini par les facteurs de convergence $\varphi_n(\alpha)$

$$(\varphi)\text{-lim} \sum_{N=\infty}^{\text{gén}} u_n = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varphi_n(\alpha) \quad (\varphi)$$

au point de vue de puissance et il établit que (φ) est plus puissant que (VP) si les facteurs $\varphi_n(\alpha)$ vérifient les trois conditions $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \varphi_n(\alpha) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n \cdot \varphi_n(\alpha) = 0$ avec une constante $c > e^5$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-2} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2n+m!}{m!} \Delta^{2n+2} \varphi_{n+2m}(\alpha) \right| < K$$

et si en outre (φ) est supposé plus puissant que (C, k) quelque grand que soit l'ordre k des moyennes arithmétiques.

E. Kogbetliantz (Téhéran).

Prasad, B. N.: On the summability of Fourier series by arithmetic means. Proc. Acad. Sci., Allahabad 4, 39—46. (1934).

The author shows that the Fourier series of $f(t)$ is summable $(C, 1)$ at $t = x$ to the sum S if the Fourier series of

$$\Phi(t)/t = \int_0^t [f(x+2u) + f(x-2u) - 2S] du/2t$$

converges at $t = 0$ [cf. W. H. Young, Proc. London Math. Soc. II, 10, 266 (1912)]. The ordinary convergence criteria give him a number of summability criteria. Thus, the existence of $\int_0^t |\Phi(t)|/t^2 dt$ is a suff. cond., and he shows by an example that this

may be the case even if $\Phi(t)/t$ does not tend to a limit. He also considers the case in which $\Phi(t)/t = \rho(t) \cos \sigma(t)$.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Takahashi, Tatsuo: On the strong summability of Fourier series. Jap. J. Math. 11, 213—221 (1935).

La sommabilité forte, $[C, \alpha, k]$, est définie ainsi:

$$s = [C, \alpha, k]\text{-lim} \sum_n s_n \quad \text{si} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^n |s_m^{(\alpha)} - s|^k = 0 \quad (k > 0)$$

et $\sum u_n$ est dite sommable $[C, \alpha, k]$ avec la somme s si la limite existe (voir pour $k = 1$ p. ex. ce Zbl. 7, 346, Winn). MM. Hardy et Littlewood ont étudié la $[C, 0, k]$ de la série de Fourier de $f(x)$ en un point x et ils l'ont démontré pour tout $k > 0$ si $f(x)$ vérifie en ce point x les conditions

$$\int_0^t \varphi(u) du = o(t) \quad \text{et} \quad \int_0^t |\varphi(u)|^p \cdot du = O(t) \quad \text{avec } p > 1$$

où comme toujours $\varphi(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2s$. — L'auteur a généralisé ce résultat et il a prouvé la $[C, \alpha, k]$ pour tout $k > 0$ et $\alpha > 0$ sous l'hypothèse beau-

coup plus large qu'au point x la fonction $f(x)$ vérifie

$$\varphi_{\alpha+1}(t) = o(1) \quad \text{et} \quad \int_0^t |\varphi_{\alpha}(u)|^p \cdot du = O(t) \quad \text{avec } p > 1$$

où $\varphi_{\alpha}(u)$ est la moyenne d'ordre α de $\varphi_0(u) \equiv \varphi(u)$ dans l'intervalle $(0, t)$ à savoir

$$\Gamma(\alpha) \cdot \varphi_{\alpha}(t) = t^{-\alpha} \cdot \int_0^t \varphi(u) \cdot (t-u)^{\alpha-1} \cdot du.$$

Son analyse est profonde et pleine de finesse.

E. Kogbetliantz (Téhéran).

Obreehkoŭ, Nikola: Sur la sommation de la série ultra-sphérique par la méthode des moyennes arithmétiques. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **200**, 1824—1825 (1935).

La série ultrasphérique de $F(\theta, \varphi)$

$$(1) \quad F(\theta, \varphi) \sim \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda) \iint_s \frac{F(\theta', \varphi') \cdot P_n^{(\lambda)}(\cos \gamma) \cdot d\sigma'}{[\sin^2 \theta' \cdot \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\frac{1}{2} - \lambda}} \quad (\lambda > 0)$$

formée en 1917 par Kogbetliantz généralise la série de Laplace ($\lambda = \frac{1}{2}$) et pour $\lambda \rightarrow 0$ se réduit, si $F(\theta, \varphi) \equiv f(\cos \theta)$, à la série de Fourier. L'étude de la sommabilité (C, δ) de cette dernière a montré qu'elle est sommable même aux points où la fonction développée n'a pas de valeur déterminée pourvu qu'elle y possède une valeur moyenne d'ordre suffisamment élevé ce qui oblige d'augmenter d'autant l'ordre des moyennes arithmétiques de sa série de Fourier pour sommer cette série. Les théorèmes de l'auteur établissent que c'est là une propriété de la série (1) quelque soit λ . Introduisant la fonction $\varphi(t)$ par

$$2\pi \cdot \Gamma(\lambda) \varphi(t) = \Gamma(\tfrac{1}{2}) \Gamma(\tfrac{1}{2} + \lambda) \int_{\gamma=t}^{\gamma=t} F(\theta', \varphi') \cdot [\sin^2 \theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda-1} d\sigma' - 2\pi \Gamma(\lambda) \sin^2 \lambda \gamma \cdot A$$

$[\gamma$ la distance sphér. de (θ, φ) et $(\theta', \varphi')]$ et ses valeurs moyennes $\varphi_o(t) \equiv \varphi(t)$ et

$$\varphi_p(t) = p \cdot t^{-p} \cdot \int_0^t (t-u)^{p-1} \cdot \varphi(u) \cdot du \quad (p > 0)$$

il a les résultats suivants: Si pour $t \rightarrow 0$

$$\int_0^t |\varphi_p(u)| \cdot du = o(t^{2\lambda+1}) \quad (p \geq 0)$$

alors (1) est sommable $(C, \delta > p + \lambda)$ avec la somme A . Ce résultat subsiste si pour $t \rightarrow 0$

$$\int_0^t |\varphi_p(u)| \cdot du = O(t^{2\lambda+1}) \quad \text{avec} \quad \varphi_{p+1}(t) = o(t^{2\lambda}).$$

Toutefois si $\delta < 2\lambda$ c'est-à-dire si $p < \lambda$ on doit supposer remplie la condition de Kogbetliantz relative à l'antipode du point (θ, φ) où l'on veut sommer la série (1): la fonction

$$(2) \quad \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{\delta-2\lambda} F(\theta', \varphi') [\sin^2 \theta' \cdot \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda-1}$$

doit être absolument intégrable sur la sphère. Enfin (généralisation des résultats d'Alexits relatifs à la série de Fourier) le fait d'avoir

$$\int_0^t |\varphi_p(u)| \cdot du = O(t^{1+2\lambda+\alpha}) \quad \left(\begin{array}{l} t \rightarrow 0 \\ 0 \leq \alpha < 1 \end{array} \right)$$

entraîne pour la moyenne arithmétique $F_n^{(k)}$ de la série (1):

$$F_n^{(k)} - A = O(n^{-\alpha}), \quad \text{si } k > p + \lambda + \alpha$$

et

$$F_n^{(k)} - A = O(n^{-\alpha} \log n), \quad \text{si } k = p + \lambda + \alpha$$

toujours dans l'hypothèse qu'au cas où $k < 2\lambda + \alpha$ ($p < \lambda$) la fonction

$$\left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{k-2\lambda-\alpha} \cdot F(\theta', \varphi') \cdot [\sin^2 \theta' \cdot \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda-1}$$

soit absolument intégrable sur la sphère.

E. Kogbetliantz (Téhéran).

Differentialgleichungen:

● **Miller, Norman:** *A first course in differential equations.* Oxford: Univ. Press 1935. 148 pag. geb. 7/6.

Inhalt: Definitionen. Bildung von Differentialgleichungen und geometrische Deutung. Gleichungen erster Ordnung und ersten Grades. Gleichungen erster Ordnung, aber nicht ersten Grades. Singuläre Lösungen von Gleichungen erster Ordnung. Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Eine Methode für gewisse Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten. Verschiedene Methoden für die Lösung von Gleichungen zweiter und höherer Ordnung. Anwendungen von Gleichungen zweiter Ordnung. Gewöhnliche Differentialgleichungen mit mehr als zwei Veränderlichen. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Partielle Differentialgleichungen höherer als erster Ordnung. Historische Bemerkungen. Lösungen der Aufgaben. — Das Buch ist für die Studierenden bestimmt, welche die Anfängervorlesungen gehört haben. Es gibt nur spezielle Lösungsmethoden und geht dabei ziemlich formal vor. Daß auch in der Theorie der Differentialgleichungen inzwischen die Entwicklung weitergegangen ist, davon ist nicht Notiz genommen. *Kamke (Tübingen).*

Rádl, Franz: Über das verallgemeinerte gemeinsame Maß von zwei Differentialpolynomen. *Math. Z.* 40, 375—386 (1935).

If the resultant $R(a, b)$ of two ordinary linear homogeneous differential polynomials $a(y), b(y)$ with solutions α, β respectively does not vanish, they may be transformed into a_1, b_1 with solutions α_1, β_1 where $\alpha_1 = b(\alpha)$ and $\beta_1 = a(\beta)$. Repetition of the transformation gives a chain of pairs terminating with a_p, b_p for which $R(a_p, b_p) = 0$. It is shown in this paper that

$$R(a, b) \cdot R(a_1, b_1) \dots R(a_p, b_p) = R(a, b_p \times b_{p-1} \times \dots \times b) = R(a_p \times a_{p-1} \times \dots \times a, b) = 0$$

whence, together with results of an earlier paper [ibid. 31, 441 (1930)] one is able to calculate with only differentiations of the coefficients the factors of a and b corresponding to the common right side factors of a_p and b_p . The passage from a_p, b_p back to a, b is made by means of the adjoint polynomials, the transform of the pair of adjoint polynomials of a_1, b_1 being the pair of adjoint polynomials of a, b . By a suitable choice of b the results may give a rapid solution of a given polynomial a as is illustrated by examples. *Raudenbush (New Haven).*

Digel, Eugen: Über den Verlauf der Integralkurven des Systems $\frac{dx}{dt} = f(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = y(x, g)$ in der Umgebung eines singulären Punktes. Tübingen: Diss. 1934. 19 S.

Fayet, Joseph: Sur l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$. *Rev. mat. hisp.-amer.*, II. s. 10, 145—154 (1935).

Conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation en question puisse être transformée par le changement de variables $y = \lambda(x) Y + \mu(x)$, $\frac{dX}{dx} = \varphi(x)$ en une équation de même forme et à coefficients constants. *Janczewski (Leningrad).*

Wintner, Aurel: On the exact value of the bound for the regularity of solutions of ordinary differential equations. *Amer. J. Math.* 57, 539—540 (1935).

Let us consider the equation $\frac{dw}{dz} = f(z, w)$ [f being regular analytic and bounded for $|z| < a$, $|w| < b$] and its solution $w(z)$ which vanishes at $z = 0$. Let also M denote the least upper bound of $|f|$. It is known that there exists a bound $\Gamma(a, b, M)$ independent of f and such that w is regular in the circle $|z| < \Gamma$; we have $\Gamma(a, b, M) \geq \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

The author proves that the value of the best bound Γ is precisely $\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ unless additional restrictions on f are not given [although the necessity of the limitation $|z| < \frac{b}{M}$ seemed to be somewhat artificial]. *Janczewski (Leningrad).*

Grave, D.: Über die Eulerschen Integrale. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 3/4, 45—61 (1935) [Ukrainisch].

Einige einfache Berechnungen mit den Eulerschen Integralen nebst Anwendungen auf die Auflösung von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von speziellen Typen. *Janczewski* (Leningrad).

Tambs Lyche, R.: Solution explicite de l'équation différentielle générale de premier ordre. Avh. Norges Tekn. Høiskole Jubil.-Bd., 765—786 (1935).

Zur Berechnung der Lösung von $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ nach der Potenzreihenmethode müssen der Reihe nach y'' , y''' , ... an der Stelle $x = x_0$ berechnet werden, wobei bei jedem Schritt y' zu ersetzen ist durch $f(x, y)$. Der Autor gibt für $y^{(n)}$ einen expliziten Ausdruck an. Dazu vgl. Viggo Brun, Sur la solution d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, dies. Zbl. 7, 113, und Über die Durchführung der Eulerschen Differentiationen bei Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, dies. Zbl. 12, 15. *Rellich* (Marburg, Lahn).

Iglisch, Rudolf: Über die Lösungen des Duffingschen Schwingungsproblems bei großen Parameterwerten. Math. Ann. 111, 568—581 (1935).

Verf. betrachtet die erste Randwertaufgabe im Intervall $\langle 0, \pi \rangle$ für die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + \alpha^2 \sin x(t) = -\beta f(t)$, wo α und β zwei reelle Parameter sind, und $f(t)$ etwa stetig sei. Er untersucht zwei Fälle: 1. falls β festgehalten wird und α über alle Grenzen wächst; 2. falls α festgehalten wird und β über alle Grenzen wächst. Er zeigt, daß im ersten Falle für jede noch so kleine positive Zahl δ für feste β eine positive Zahl α_0 so angegeben werden kann, daß für jedes $\alpha^2 \geq \alpha_0^2$ das Problem mindestens $\nu = 2[\alpha(1 - \delta)]$ Lösungen besitzt; mindestens je zwei davon verschwinden im Intervall $\langle 0, \pi \rangle$ genau ν -mal, für $\nu = 0, 1, 2, \dots [(1 - \delta)\alpha] - 1$. Im zweiten Fall kann gezeigt werden, daß für eine große Klasse von $f(t)$ [die Lösung $X(t)$ der ersten Randwertaufgabe von $\ddot{x}(t) = f(t)$ im Intervall $\langle 0, \pi \rangle$ soll nur endlich viele Nullstellen mit verschwindender Tangente besitzen; hierher gehört z. B. das eigentliche Duffingsche Problem $f(t) = \sin t$] für genügend große β genau eine Lösung besitzt. Durch ein Beispiel wird gezeigt, daß die letztere Bedingung für $f(t)$ nicht ganz aufgehoben werden kann. *A. Andronoff u. A. Witt* (Moskau).

Weinstein, D. H.: Characteristic values of the Mathieu equation. Philos. Mag., VII. s. 20, 288—294 (1935.)

Verf. berechnet die Eigenwerte der Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung, als Funktion des zweiten Parameters, bei vorgegebenem Wert des charakteristischen Exponenten. Letzterer ist dabei imaginär angenommen (stabile Lösungsgebiete, vgl. Erg. Math. 1, H. 3). Die vom Verf. selber früher veröffentlichte Erweiterung des Ritzschen Verfahrens erlaubt, die Eigenwerte bei Annahme der Eigenfunktionen einzugrenzen. Insbesondere berechnet er nach dieser Methode den asymptotischen Verlauf der Eigenwertkurven in der Parameterebene und findet dabei die bereits bekannten Ergebnisse. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Gorelik, G.: Resonanzerscheinungen in linearen Systemen mit periodisch veränderlichen Parametern. II. Z. techn. Physik, Leningrad 5, 195—215 (1935) [Russisch].

Verf. zeigt, daß unter der Einwirkung einer äußeren periodischen Kraft in linearen Systemen mit periodisch veränderlichen Parametern, die bei Abwesenheit von Reibung sich in der Nähe der Grenze des stabilen und labilen Gebietes befinden, Resonanzerscheinungen eintreten können, die sich wesentlich von den gewöhnlichen Resonanzerscheinungen beim harmonischen Oszillator unterscheiden. Es gibt Kräfte, die Resonanz ersten Grades bewirken, bei welchen der Hauptteil der Lösung umgekehrt proportional dem Reibungskoeffizienten ist. Es gibt aber eine andere Klasse von Kräften, die Resonanz zweiter Ordnung zeigen, bei denen der Hauptteil der Lösung umgekehrt proportional dem Quadrate des Reibungskoeffizienten ist. Die Wirkung einer sinusoidalen Kraft kann stark von der Phase abhängen; die Resonanzkurven sind ganz anderen Charakters als beim harmonischen Oszillator. Bei kleiner Ab-

stimmung der periodischen äußeren Kraft nimmt die erzwungene stationäre Lösung die Form langsamer Schwebungen an. (I. vgl. dies. Zbl. 11, 68.)

A. Andronoff u. A. Witt (Moskau).

Gorelik, G.: Resonanzerscheinungen in linearen Systemen mit periodisch veränderlichen Parametern. III. Z. techn. Physik, Leningrad 5, 489—517 (1935) [Russisch].

Verf. untersucht parametrisch anfachbare Systeme mit Reibung unter der Einwirkung einer äußeren periodischen Kraft. Mathematisch ist die Aufgabe äquivalent der Untersuchung einer linearen Differentialgleichung von der Form:

$$L(y) + 2\delta y' = f(t),$$

wo $L(y)$ von der Form $y'' + p(t)y$ ist; $p(t)$ ist periodisch: Die Wirkung der äußeren Kraft hängt hier wesentlich von ihrer Phase ab (Verf. untersucht den sinusoidalen Fall). Neben den Resonanzerscheinungen 1. Ordnung, wo die erzwungenen Schwingungen der ersten Potenz des Reibungsüberschusses über der parametrischen Anfachung umgekehrt proportional sind, finden hier auch Resonanzerscheinungen „halber“ Ordnung statt, wo die erzwungenen Schwingungen der Quadratwurzel des Reibungsüberschusses proportional sind. Stimmt man den Resonator ab, so erhält man im Falle der Resonanz halber Ordnung eine Resonanzkurve mit zwei Maxima. Bei Abstimmung im Falle der Resonanz 1. Ordnung erhält man Schwebungen.

A. Andronoff, A. Witt (Moskau).

Gorelik, G.: Phénomènes de résonance dans les systèmes linéaires à paramètres périodiques. Techn. Physics USSR 2, 135—180 (1935).

Es werden drei schon früher in russischer Sprache veröffentlichte Arbeiten des Verf. zusammengefaßt (vgl. dies. Zbl. 11, 68 und vorst. Referate).

A. Andronoff, A. Witt (Moskau).

Krawtchouk, M.: Sur l'approximation des solutions des équations différentielles linéaires par le procédé des moments. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 2, 23—63 u. franz. Zusammenfassung 63—64 (1935) [Ukrainisch].

Suite des travaux précédents de l'auteur (ce Zbl. 6, 55; 8, 13; 10, 202). Soit donné le système différentiel $L(y) = f(x)$, $U_h(y) = 0$ ($a \leq x \leq b$) ($h = 0, 1, \dots, k-1$) (les notations de Zbl. 6, 55) et un système $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \dots$ de fonctions orthogonales sur l'intervalle (a, b) avec le poids $p(x)$. Nommons

$$y_m = a_0^{(m)} \varphi_0(x) + a_1^{(m)} \varphi_1(x) + \dots + a_m^{(m)} \varphi_m(x),$$

où les φ_n sont définis par les équations

$M(\varphi_n) = r(x) \Phi_n(x)$, $U_h(\varphi_n) = 0$ ($r(x) \geq 0$; $h = 0, \dots, k-1$; $n = 0, 1, 2, \dots$) (la définition de M voir loc. cit.), et les $a_i^{(m)}$ par les équations

$$\int_a^b \{L(y_m) - f(x)\} \Phi_n q(x) dx = 0 \quad [q(x) \geq 0; n = 1, 2, \dots, m].$$

Alors par un choix correspondant de p, q, r on peut approximer $y \dots y^{(k-1)}$ par $y_m \dots y_m^{(k-1)}$ avec un degré d'approximation égal à celui de l'approximation de Fourier de l'ordre m . En particulier on peut prendre pour Φ_n les polynômes de Legendre et de Tchebycheff.

Janczewski (Leningrad).

Burstin, C.: Beiträge zum Problem von Pfaff und zur Theorie der Pfaffschen Aggregate. I. Beitrag. Rec. math. Moscou 41, 582—618 (1935).

In der vorliegenden Arbeit entwickelt der Verf. eine Erweiterung der Integrations-theorie der Pfaffschen Systeme auf Systeme von Gleichungen, die durch Annullieren von alternierenden Differentialformen höheren Grades entstehen. In der letzten Zeit sind einige dasselbe Ziel anstrebende Arbeiten erschienen (vgl. dies. Zbl. 9, 109, 110; 11, 161), insbesondere die Theorie von E. Kähler, die breiter als die des Verf. angelegt ist. Die beiden Theorien haben mehrere Berührungspunkte, sie sind jedoch unabhängig voneinander und beinahe zur gleichen Zeit geschrieben worden. Der Verf. beschäftigt sich hauptsächlich mit Gleichungssystemen von der Gestalt $(\alpha) A_i dx_i = 0, (\beta) B_{ik} dx_i \delta x_k = 0$

($\alpha = 1, \dots, m_1$; $\beta = m_1 + 1, \dots, m$; $i, k = 1, \dots, n$), für deren Integrale er drei einander naheliegende Existenzsätze beweist. Die Sätze geben Bedingungen an, unter welchen Integralmannigfaltigkeiten einer bestimmten Dimension existieren. In der zweiten Hälfte der Arbeit wird eine sog. Adjunktionsmethode und ihre Bedeutung für die Integration von Pfaffschen Systemen besprochen. In dieser Methode handelt es sich im wesentlichen um eine Erweiterung des gegebenen Pfaffschen Systems mittels passender Gleichungen zu einem vollständigen System. Es dürfte jedoch dem Verf. entgangen sein, daß die dabei vorkommende Invariante, die er als Gewicht des Systems $(\alpha)A_i dx_i = 0$ bezeichnet, bereits von J. M. Thomas als Spezies des Systems eingeführt worden ist (vgl. dies. Zbl. 6, 348). O. Borůvka (Brno).

Sintsov, D. M.: Études sur les systèmes de courbes intégrales de l'équation de Pfaff $\sum P dx = 0$. (Détermination des courbes intégrales situées sur une surface donnée. Application aux courbes du complexe linéaire.) Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 11, 35—43 (1935).

Die Integralkurven einer Pfaffschen Gleichung $P dx + Q dy + R dz = 0$, die auf einer gegebenen Fläche liegen, werden durch Differentialbedingungen bestimmt. Diese werden besprochen. Beispiele. O. Borůvka (Brno).

Sintsov, D. M.: Sur une application mécanique des propriétés des courbes intégrales de l'équation de Pfaff. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 11, 45—47 (1935).

Der Verf. bemerkt, daß die Resultate der allgemeinen Theorie des Kurvensystems einer nichtintegrierbaren Pfaffschen Gleichung in drei Veränderlichen (vgl. dies. Zbl. 4, 418) eine Anwendung bei der Besprechung der Gleichgewichtsbedingung für Flüssigkeiten $dp = \rho(P dx + Q dy + R dz)$ (1) finden. In der Gleichung (1) bedeutet ρ die Dichte der Flüssigkeit, p den Druck und P, Q, R die Komponenten der auf die Masseneinheit wirkenden Kraft. Ist z. B. $\rho = \text{konst.}$ und ist die Gleichung (1) nichtintegrierbar, so gibt es durch jeden Punkt x, y, z unendlich viele Kurven gleichen Druckes, d. i. die Integralkurven der Gleichung $P dx + Q dy + R dz = 0$ (2). Unter diesen gibt es ausgezeichnete Kurven, z. B. die Asymptotenkurven der Gleichung (2). Usw.

O. Borůvka (Brno).

Schwalbe, Friedrich: Untersuchungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung vom elliptischen Typus. Leipzig: Diss. 1935. 48 S.

Winants, Marcel: Résolution du problème (α_0 , IV, 2'). Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 21, 495—503 (1935).

Anwendung der Methode der sukzessiven Approximationen auf eine vom Verf. schon betrachtete partielle Differentialgleichung 3. Ordnung (dies. Zbl. 11, 210), wobei jetzt das rechte Glied der Gleichung nicht nur von den Variablen x, y und der gesuchten Funktion $z(x, y)$ abhängt, sondern auch von den Ableitungen z_x, z_y , und, als Nebenbedingungen, die Werte von z für $y = 0$ und die von z, z_x für $x = 0$ vorgegeben sind. G. Cimmino (Napoli).

● Bouligand, G., G. Giraud et P. Delens: Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel. (Actualités scient. et industr. Nr. 219.) Paris: Hermann & Cie. 1935. 78 pag. Frcs. 18.—

Michlin, S.: La solution du problème plan biharmonique et des problèmes de la théorie statique d'élasticité à deux dimensions. Publ. Inst. Seismol. Acad. Sci. URSS Nr 37, 1—21 (1934).

Exposé détaillé des résultats publiés dans une note précédente (ce Zbl. 8, 359) avec quelques théorèmes de plus. Avec l'aide de la fonction de Green complexe (voir loc. cit.) l'auteur donne les solutions de certains problèmes biharmoniques réduits aux équations intégrales. Tels sont par ex., le problème dit fondamental — trouver la fonction biharmonique W quand W et $\frac{\partial W}{\partial \nu}$ sont donnés sur le contour; trouver les tensions et les déplacements dans l'intérieur du domaine étant donnés les déplacements

ments de la frontière ou les efforts extérieurs. Le domaine peut être aussi infini. — Quelques résultats plus récents de l'auteur obtenus par la même voie v. Zbl. 11, 304.

Janczewski (Leningrad).

Michlin, S.: Méthode des approximations successives dans le problème biharmonique. Publ. Inst. Seismol. Acad. Sci. URSS Nr 39, 1—14 (1934) [Russisch].

Es wird das biharmonische Problem für zweifach zusammenhängende Bereiche gelöst mit Hilfe von sukzessiven Approximationen, welche nach der Muschelišvilischen Methode (dies. Zbl. 5, 358) erhalten werden. (S. auch eine parallele Note des Verf. dies. Zbl. 7, 306.)

Janczewski (Leningrad).

Spezielle Funktionen:

MacRobert, T. M.: Some series and integrals involving associated Legendre functions, regarded as functions of their degrees. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 55, 85—90 (1935).

The author first gives an integral, involving one associated Legendre function, which may be derived from the Mehler-Dirichlet integral by means of Fourier's inversion formula. A trigonometrical series whose coefficients are associated Legendre functions is summed first over a finite range and then over an infinite range. — An integral of $\cos(\varrho\tau)$ multiplied by two associated Legendre functions of degree $\tau - \frac{1}{2}$. But with different values of the argument, is evaluated first for the range $\tau = 0$ to λ and then for the infinite range. When $\varrho = 0$ the latter integral is expanded in two power series whose coefficients are hypergeometric functions. The case $\varrho = \pi$ is next considered. — The paper closes with the summation of a trigonometrical series in which the coefficients are products of associated Legendre functions. The argument of the trigonometrical functions and the degrees of the Legendre functions each forming arithmetical progressions.

H. Bateman (Pasadena).

Shastri, N. A.: Operational methods and the k -function. J. Indian Math. Soc., N. s. 1, 155—164 (1935).

Operational methods are used to obtain the value of the sum of an infinite series whose general term is $a_n k_{2n}(x)$. For example when $a_n = n^2 \exp(ni\pi/2)$ the sum over positive integral values of n is $(x^2 - ix) \exp(ix)$. An interesting case in which the sum is a polynomial in x^2 is that in which $a_n = n^2(n^2 - 1^2) \dots (n^2 - r^2)$.

H. Bateman (Pasadena).

Meijer, C. S.: Integraldarstellungen aus der Theorie der Besselschen Funktionen. Proc. London Math. Soc., II. s. 40, 1—22 (1935).

Der Verf. beweist sechs Sätze, von denen die wichtigsten sind:

Satz 1: Für n ganz ≥ 2 , $\zeta \neq 0$, $|\arg \zeta| < 2\pi$

$$\max\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \frac{\arg \zeta}{2}\right) < \tau < \min\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\arg \zeta}{2}\right), \quad r_j \neq 0, -1, -2, \dots (j=1, \dots, n-2)$$

$$a_j - a_h \text{ nicht ganz } \begin{pmatrix} j=1, 2, \dots, n+1; \\ h=1, 2, \dots, n+1; j \neq h \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\prod_{j=1}^{n+1} \Gamma(a_j - a_h) / \Gamma(a_j)}{\prod_{j=1}^{n-2} \Gamma(r_j - a_h)} \zeta^{a_h} {}_{n-1}F_n \left[\begin{matrix} a_h, 1 + a_h - r_1, \dots, 1 + a_h - r_{n-2}; \\ 1 + a_h - a_1, \dots, 1 + a_h - a_{n+1} \end{matrix} ; -\zeta \right] =$$

$$= \frac{2\pi i e^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \pi i}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \prod_{j=1}^{n-2} \Gamma(r_j)} \int_0^{\infty} u^{\alpha+\beta-1} H_{\alpha-\beta}^{(1)} \left(2ue^{\frac{\pi i}{2}} \right) {}_{n+1}F_n \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_{n+1} \\ r_1, \dots, r_{n-2}, \alpha, \beta \end{matrix} ; -\frac{u^2}{\zeta} \right] du.$$

α und β sind beliebig, $\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\beta) > 0$. Der Stern in der unteren Zeile der ersten verallgemeinerten hypergeometrischen Reihe bedeutet, daß die Zahl $1 + a_h - a_h$ in der Reihe $1 + a_h - a_1, \dots, 1 + a_h - a_{n+1}$ nicht vorkommt.

Satz 2: Für n ganz ≥ 2 , $\zeta \neq 0$, $|\arg \zeta| < \pi$, r_j und $a_j - a_h$ wie in Satz 1 gilt:

$$\min_{h=1, \dots, n+1} \{\Re(a_h)\} > -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(a_{n+1})} \sum_{h=1}^n \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(a_j - a_h) / \Gamma(a_j)}{\Gamma(1 + a_h - a_{n+1}) \prod_{j=1}^{n-2} \Gamma(r_j - a_h)} \zeta^{a_h} {}_{n-1}F_n \left[\begin{matrix} a_h, 1 + a_h - r_1, \dots, 1 + a_h - r_{n-2}; \zeta \\ 1 + a_h - a_1, \dots, 1 + a_h - a_{n+1} \end{matrix} \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \prod_{j=1}^{n-2} \Gamma(r_j)} \int_0^\infty v^{\alpha+\beta-1} \left\{ e^{(a_{n+1}-\beta)\pi i} H_{\alpha-\beta}^{(1)}(2v) + e^{(\beta-a_{n+1})\pi i} H_{\alpha-\beta}^{(2)}(2v) \right\} \times \\ & \times {}_{n+1}F_n \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_{n+1} \\ r_1, \dots, r_{n-2}, \alpha, \beta \end{matrix} ; -\frac{v^2}{\varrho} \right] dv. \end{aligned}$$

α und β beliebig; $\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\beta) > 0$, $\Re(\alpha + \beta) < \frac{3}{2} + 2 \min_{h=1, \dots, n+1} \{\Re(a_h)\}$. Mit diesen Sätzen werden u. a. neue, einfache Beweise für mehrere schon bekannte Integralausdrücke von Produkten zweier Besselscher Funktionen gegeben. *S. C. van Veen.*

Poole, E. G. C.: On associated hypergeometric series. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 6*, 214—216 (1935).

An easy method of proving Gauß's relations between contiguous hypergeometric series is given, in which the six series contiguous to $F(a, b; c; x)$ are expressed in terms of F and its derivative DF . By equating any two values of DF Gauß's fifteen relations are obtained. It is then shown that the associated series $F(a + l, b + m; c + n; x)$, where l, m, n are integers, can be derived from $F(a, b; c; x)$ by at most three operations of the type $[x^\alpha(1-x)^\beta D^k x^\alpha(1-x)^\beta]$, from which a method is derived for obtaining a linear relation (with polynomial coefficients) between three associated series. Analogues of Jacobi's formula are also obtained. *W. N. Bailey (Manchester).*

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Izumi, Shin-ichi: A remark on an integral equation. *Proc. Imp. Acad. Jap.* **11**, 210—211 (1935).

Die Gleichung $2f(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$ hat keine Lösung, außer $f(x) \equiv 0$, welche in $(-\infty, \infty)$ zu L^2 gehört, und nur die Lösung $Ax + B + Ce^{-ux}$, wobei $e^u - e^{-u} = 2u$, welche im Endlichen beschränkt und im Unendlichen $O(e^A |x|^1)$ ist. *Bochner.*

Krein, M. G.: Sur quelques applications des noyaux de Kellogg aux problèmes d'oscillation. *Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff*, IV. s. **11**, 3—19 (1935).

L'auteur appelle un noyau symétrique et réel $K(x, \xi)$ „noyau de Kellogg“ si pour tous deux systèmes de nombres $x_1 < \dots < x_n$, $\xi_1 < \dots < \xi_n$ pris entre a et b l'on a $K \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} > 0$, $K \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \xi_1 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \geq 0$. Kellogg a démontré [*Amer. J. Math.* **40**, 145—154 (1918)] que dans le cas d'une équation intégrale avec un tel noyau: 1° toutes les valeurs caractéristiques λ_i sont positives et simples, 2° les fonctions fondamentales $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ forment une série interpolante [c'est-à-dire pour tout système de nombres $x_1 \dots x_n$ distincts on a $\text{Det} \{ \varphi_k(x_j) \} \neq 0$ ($k = 0 \dots n-1$; $j = 1 \dots n$; $n = 1, 2, 3, \dots$)] 3° φ_n a n zéros entre a et b , — etc. — M. Krein remarque que ces propriétés ont

lieu de même pour une équation „chargée“ $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\sigma(\xi)$ (Zbl. **12**, 20) (σ étant monotone croissante). Il donne ensuite pour quelques classes de systèmes différentiels aux conditions aux limites des règles pour constater que la fonction de

Green d'un tel système est un noyau de Kellogg et que les fonctions fondamentales oscillent par conséquent selon les lois classiques de Sturm. Ces théorèmes sont basés sur l'étude du noyau „à une couple“ $K(x, \xi) = \psi(x)\chi(\xi)$ pour $x \leq \xi$, et $= \psi(\xi)\chi(x)$ pour $x \geq \xi$. Les résultats classiques de Sturm-Liouville, de Davidoglou [Ann. Ecole norm. 17, 359—444 (1900)] ainsi qu'une partie des théorèmes d'oscillation de Janczewski [Ann. of Math. 29, 521—542 (1928)] sont obtenus comme cas particuliers des résultats de l'auteur. — Applications aux vibrations des cordes et des tiges.

Janczewski (Leningrad).

Krein, M. G.: Sur une classe spéciale d'opérateurs différentiels. C. R. Acad. Sci. URSS 2, 345—347 u. franz. Text 347—349 (1935) [Russisch].

Suite du mémoire précédent. Appelons opérateur \mathfrak{K} tout opérateur différentiel ou quasi-différentiel autoadjoinct de l'ordre $2m$ dont la fonction de Green correspondante au système „le plus simple“ de conditions aux limites

$$y|_{x=a,b} = D_1 y|_{x=a,b} = \dots = D_{m-1} y|_{x=a,b} = 0$$

($D_i y$ quasi-dérivées) est un noyau de Kellogg. Alors si $L(y) = L_1(\varrho L_2(y))$, où L_1, L_2 sont deux opérateurs \mathfrak{K} et $\varrho > 0$, $-L(y)$ est aussi un opérateur \mathfrak{K} . De même si une fonction de Green quelconque de l'opérateur autoadjoinct $L_{2m}(y)$ est un noyau de Kellogg, L_{2m} est aussi un opérateur \mathfrak{K} .

Janczewski (Leningrad).

Funktionentheorie:

● **Copson, E. T.:** An introduction to the theory of functions of a complex variable. Oxford: Clarendon press 1935. 448 S. a. 8 fig. geb. 25/-.

Contenu du volume. Définition des nombres complexes, leur représentation plane et sphérique; théorie des suites et des séries; séries doubles. Définition des fonctions analytiques uniformes, fonctions exponentielle, trigonométriques, logarithmique. Intégration, théorèmes de Cauchy, développements en séries de puissance des fonctions analytiques, théorème de Weierstrass sur les points essentiels, prolongement analytique. Suites de fonctions, produits infinis, fonctions définies par des intégrales. Calcul des résidus, application au calcul intégral, formule de Lagrange, développements en séries de fractions rationnelles, factorisation du sinus. Fonctions entières, théorème de Weierstrass, fonctions d'ordre fini, théorème d'Hadamard. Représentation conforme: transformation homographique, lemme de Schwarz, représentation d'un cercle sur un cercle ou un demi-plan, principe de la symétrie, représentation d'un polygone sur un plan. Fonction eulérienne: les deux définitions, leur identité, formule des compléments, formules de Stirling, de Hankel. Equations différentielles linéaires du second ordre: étude des singularités, cas de trois singularités régulières, fonctions hypergéométriques et généralisations. Fonctions de Legendre: polynômes, leur équation différentielle et son intégration; développements en séries de polynômes de Legendre; fonctions associées. Fonctions de Bessel, de Hankel, polynômes de Neumann. Fonctions elliptiques, de Weierstrass et de Jacobi; évaluation des intégrales elliptiques; périodes et modules, transformation de Landen, fonctions théta. Périodes primitives, groupe et fonction modulaire, théorème de Picard. — L'auteur s'est volontairement restreint à l'étude des fonctions uniformes: les indications sur les diverses branches du logarithme, de la fonction puissance, sur le prolongement analytique, sont très sommaires; l'intégration des fonctions analytiques n'est effectuée que dans un domaine de régularité simplement connexe. L'exposé est parfois un peu bref et ne met pas toujours en évidence les points admis sans démonstration (par exemple dans la représentation conforme des polygones sur un demi-plan). L'aut. s'adressant à des débutants a naturellement omis la démonstration complète de certains théorèmes tel que celui de Riemann sur la représentation conforme; il a donné plus d'importance à la recherche plus concrète de représentations analytiques simples et de beaux développements en série qu'à celle, plus abstraite; de propriétés générales de classes de fonctions. Sa définition: une f. analytique uniforme dans un domaine est une fonction uniforme et dérivable dans ce domaine sauf en un nombre fini de points, qui rapproche pôles et points essentiels isolés et éloigne de ces derniers les points limites de pôles, semble se rattacher à cet ordre d'idées. La représentation sphérique n'est pas utilisée pour rapprocher fonctions méromorphes (ce terme ne figure pas dans le livre) et holomorphes. Dans son ensemble, l'ouvrage, complété par de nombreuses propositions présentées sous forme d'exercices, est très propre à éveiller l'intérêt et la curiosité du lecteur et constitue une excellente introduction aux monographies spéciales et au traité de Whittaker et Watson.

G. Valiron (Paris).

Fédorov, V. S.: Sur les dérivées des fonctions partout continues d'une variable complexe. Bull. Acad. Sci. URSS, VII, s. Nr 2, 307—311 u. franz. Zusammenfassung 311 (1935) [Russisch].

Let $\{z_n\}$ be a sequence such that $z_n \rightarrow \xi$ while $\sum_1^\infty |\xi - z_n| |\log |\xi - z_n|| < \infty$.

The author constructs a function $f(z)$ single valued and continuous on the whole complex sphere and analytic on the sphere except for a (bounded) perfect set E , everywhere discontinuous, each portion of E being of positive measure and such that $\xi \in E$, while $f'(z)$ exists at $z = z_1, \dots, z_n, \dots, \xi$, and $f(z_n) = f(\xi) = 0$. The construction can be extended to the case where $\{z_n\}$ consists of any finite number of sequences of the above type.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Fedoroff, W.: Sur les fonctions monogènes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 13—14 (1935).

This communication contains some conditions for a complex function to be either holomorphic or equivalent (i.e. almost everywhere equal) to a holomorphic function. For instance: In order that a complex function $f(z)$ summable in an open region D should be equivalent to a holomorphic function, it is necessary and sufficient that at every point ζ in D we have $\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{\varrho^4} \int_{\omega(\varrho)} (z - \zeta) f(z) d\omega = 0$,

where z is the variable of integration and $\omega(\varrho)$ denotes the circle $|z - \zeta| < \varrho$. The complete proofs are not given and only some details of the reasonings are sketched.

Saks (Warszawa).

Onicescu, Octave: Sur les fonctions holotropes. C. R. Acad. Sci., Paris 201, 122 bis 123 (1935).

Une fonction holotope du point (x, y) dans le domaine δ est une fonction complexe $f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$ pour laquelle le jacobien $\frac{D(P, Q)}{D(x, y)}$ reste positif dans tout domaine intérieur à δ sauf en un nombre fini de points où il est nul. — L'auteur donne pour ces fonctions quelques propriétés se rattachant à des propriétés correspondantes des fonctions holomorphes.

E. Blanc (Paris).

Haugland, Arne: Über einen Satz von Herrn P. Dienes. Arch. Math. og Naturvid. 41, Nr 2, 1—7 (1935).

Vgl. dies. Zbl. 10, 404.

Miller, E. W.: On the singularities of an analytic function. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 561—565 (1935).

L'Aut. démontre que: I. Si $f(z) = \sum a_n z^n$ admet $|z| < 1$ pour cercle de convergence, une condition nécessaire et suffisante pour que $z = 1$ soit le seul point singulier sur $|z| = 1$ et soit un pôle d'ordre m est qu'il existe un polynôme $g(x)$ de degré $m - 1$ tel que, si $A_n = a_n/g(n)$, on ait $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_{n+1} - A_n|^{1/n} < 1$. II. Une condition néc. et suf.

pour que $f(z)$ n'admette sur $|z| = 1$ qu'une seule singularité qui soit un pôle d'ordre m est qu'il existe un polynôme $g(x)$ d'ordre $m - 1$ tel que, si $A_n = a_n/g(n)$, on ait $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n^2 - A_{n+1} A_{n-1}|^{1/n} < 1$. Ces propositions se ramènent de suite respectivement

à des th. de Pringsheim et Hadamard en écrivant $f(z) = \sum g(n) z^n + \sum b_n z^n$ la première série étant la partie principale du pôle ou formée avec le polynôme de l'énoncé, et en considérant $\sum z^n + \sum b_n z^n/g(n)$. [Le Réf. observe que ces th. n'éliminent pas complètement les éléments de la partie principale du pôle comme ceux de Pringsheim et Hadamard et restent voisins de la prop. banale $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{1/n} < 1$; en écrivant que le rayon de convergence de $(z - 1)^m f(z)$ est > 1 on a de suite une véritable généralisation du th. de Pringsheim.]

G. Valiron (Paris).

Biernacki, Miéiclas: Sur quelques majorantes de la théorie des fonctions univalentes. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 256—258 (1935).

Es seien $f(z)$ und $F(z)$ im Kreise $|z| < 1$ regulär-schlichte Funktionen der Form $cz + c_2z^2 + \dots$, $c > 0$. Die Bildgebiete g, G seien so beschaffen, daß g in G enthalten, jedoch $g \neq G$ ist. Verf. beweist $|f(z)| < |F(z)|$, wenn nur $0 < |z| < r_0$, wobei

$$\log \frac{1+r_0}{1-r_0} + 2 \operatorname{arctg} r_0 = \frac{\pi}{2} \quad (r_0 = 0,390 \dots)$$

gilt. Die Zahl r_0 kann nicht durch eine größere ersetzt werden. — Im Falle sternförmiger bzw. konvexer Abbildungen ist r_0 durch $\sqrt{2} - 1 = 0,414 \dots$ bzw. durch die Wurzel der Gleichung

$$\operatorname{arcsin} r_1 + 2 \operatorname{arctg} r_1 = \frac{\pi}{2} \quad (r_1 = 0,543 \dots)$$

zu ersetzen. — Es wird nur der Beweis des erstgenannten Theorems angedeutet; er stützt sich auf Ergebnisse von Julia und Grunsky. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Robinson, R. M.: The Bloch constant \mathfrak{A} for a Schlicht function. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 535—540 (1935).

\mathfrak{A} sei die obere Grenze der Radien aller offenen Kreisscheiben, die man in einem beliebigen Gebiet, das aus $|x| < 1$ durch eine schlichte Abbildung der Form $f(x) = x + \dots$ entsteht, unterbringen kann. Landau [Math. Z. **30**, 608 (1929)] bewies $\mathfrak{A} > 0,56$, ferner ist leicht einzusehen, daß $\mathfrak{A} \leq \pi/4$. Verf. erhält durch Betrachtung von speziellen Gebieten, die aus einem Kreis durch Legung von passenden orthogonalen, geradlinigen Schlitten entstehen, bessere obere Schranken. Insbesondere gewinnt er durch Legung von sechs geeigneten Schlitten $\mathfrak{A} < 0,658$. *G. Szegö*.

Levin, V.: Some remarks on the coefficients of schlicht functions. Proc. London Math. Soc., II. s. **39**, 467—480 (1935).

Es sei S_k die Klasse der in $|z| < 1$ regulär-schlichten Funktionen von der Form $z + a_2^{(k)} z^{k+1} + a_3^{(k)} z^{2k+1} + \dots$. Es sei $\max |a_n^{(k)}| = \alpha_n^{(k)}$. Nach Littlewood und Paley [J. London Math. Soc. **7**, 167 (1932); dies. Zbl. **5**, 18] ist die obere Grenze A von $\alpha_n^{(k)}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) endlich. Verf. gewinnt durch Benutzung der Littlewood-Paleyschen Methode $A < 3,39 \dots$, ferner für den entsprechenden limes superior die obere Schranke $3,006 \dots$. Außerdem werden für $\alpha_n^{(k)}$ ($3 \leq n \leq 8$) numerische Schranken gewonnen. — Schließlich bestimmt er die entsprechenden Maxima für die Unterklassen von S_k , die sternförmige bzw. konvexe Abbildungen enthalten. Sie lauten:

$$\left| \left(-\frac{2}{k} \right)_n \right| \quad \text{bzw.} \quad (nk+1)^{-1} \left| \left(-\frac{2}{k} \right)_n \right|.$$

G. Szegö (St. Louis, Mo.).

Sato, Tokui: Ein Satz über Schlichtheit von einer meromorphen Funktion. Proc. Imp. Acad. Jap. **11**, 212—213 (1935).

Die Funktion $g(z)$ sei regulär in dem $z = 0$ enthaltenden konvexen Bereiche D , und es sei $\Re g'(z) > \varrho^{-2}$, $\varrho > 0$. Dann ist $g(z) + z^{-1}$ schlicht in dem gemeinsamen Teile von D und $|z| > \varrho$. — Der Beweis bereitet keine Schwierigkeiten.

G. Szegö (St. Louis, Mo.).

Zmorowitsch, V. A.: Deux problèmes du domaine des représentations conformes. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr **3/4**, 215—222 (1935) [Ukrainisch].

Der Verf. konstruiert diejenige Funktion, die das Innere des Einheitskreises auf das Innere einer Ellipse abbildet, ferner die Funktion, welche einen Kreisring näherungsweise in das Äußere von zwei gleichen, symmetrisch gelegenen Ellipsen überführt.

Stefan Bergmann (Toms).k).

Cartwright, M. L.: On certain integral functions of order 1 and mean type. Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 347—350 (1935).

Verf. bespricht die Beziehung einiger Sätze von verschiedenen Verfassern zu ihren eigenen Ergebnissen.

Ulrich (Göttingen).

Pennycuik, K.: On a theorem of Besicovitch. J. London Math. Soc. **10**, 210 bis 212 (1935).

Il s'agit de ce théorème: Si $F(z)$ est une fonction entière d'ordre $\rho < 1/2$ la densité supérieure de l'ensemble des r tels que

$$\log |F(re^{i\varphi})| > r^{\rho-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad \varphi \text{ arbitraire,} \quad (1)$$

est au moins $1 - 2\rho$ (Besicovitch, Math. Ann. **97**). La démonstration de Besicovitch n'était valable que dans le cas des croissances régulières (une proposition moins précise fut donnée par Amira, une autre par le Réf., une autre moins générale par Miss Cartwright [voir ce Zbl. **10**, 122]). L'auteur complète la démonstration de Besicovitch et la rend générale en suivant la même méthode. Il montre également que l'ensemble des r pour lesquels on a (1) et $\log |F(re^{i\varphi})| > (\cos \pi \rho') \log [\max |F(re^{i\varphi})|]$, φ arbitraire, $0 < \rho < \rho' < \frac{1}{2}$, a une densité supérieure au moins égale à $1 - \rho/\rho'$.

É. Valiron (Paris).

Selberg, Henrik L.: Über eine Klasse analytischer Funktionen. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo **1935**, 1—8 (Nr. 3).

Sei \mathfrak{X} eine Riemannsche Fläche, die über jedem Punkte der x -Ebene höchstens k Blätter hat; es werde aber ausdrücklich zugelassen, daß ihre Blattzahl über gewissen Teilen der Ebene kleiner als k sein darf. Auf \mathfrak{X} werde eine Funktion $w = f(x)$ gebildet, die gegenüber q Werten a_n folgende Wertverteilungseigenschaft besitzt: Zu a_n gebe es zwei ganze, positive Zahlen λ_n, τ_n (τ_n darf auch ∞ sein) mit $\sum (1 - \lambda_n/\tau_n) \leq 2$, derart, daß $f(x)$ den Wert a_n stets nur τ_n -fach und nur an einer λ_n -blättrigen (Windungs-) Stelle von \mathfrak{X} annimmt; für $a \neq a_n$ sei $\lambda = \tau = 1$. M. a. W. $f(x)$ bildet \mathfrak{X} eineindeutig auf eine Riemannsche Fläche \mathfrak{Y} ab, die nur über den a_n Windungspunkte hat, die übrigens alle gleichartig sein sollen und nur aus gleichartigen Windungspunkten in \mathfrak{X} entstehen. — Es wird gefragt, wann es solche Funktionen $f(x)$ — und Flächen \mathfrak{X} — bei gegebenen a_n, λ_n, τ_n gibt. Verf. skizziert eine Lösung dieser Frage, die als einzige Möglichkeit die Umkehrung Abelscher Integrale der Form

$$x = \int \Pi(w - a_n)^{\frac{\lambda_n}{\tau_n} - 1} dw \quad \text{mit} \quad \sum (1 - \lambda_n/\tau_n) = 2$$

offenläßt. Offenbar fällt damit die Möglichkeit fort, daß die Fläche \mathfrak{X} über gewissen Gebieten der x -Ebene ihre höchste Blattzahl unterschreitet. — Ref. konnte übrigens nicht alle Schlüsse des Verf. als zwingend erkennen. Ullrich (Göttingen).

Ahlfors, Lars: Über die konforme Abbildung von Überlagerungsflächen. (Stockholm, Sitzg. v. **14**.—**18**. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 299—305 (1935).

Ahlfors, Lars: Zur Theorie der Überlagerungsflächen. Acta math. **65**, 157—194 (1935).

Man weiß seit mehreren Jahren, daß sich hinter dem zweiten Hauptsatz der Wertverteilungslehre (d. i. die zur Zeit schärfste Form des klassischen Picardschen Satzes) ein Grenzfall der Riemannschen Geschlechtsformel für geschlossene Riemannsche Flächen vom Geschlecht $p = 0$ verbirgt:

$$\sum (\lambda - 1) = 2g + 2p - 2,$$

λ ist die Blattzahl eines Windungspunkts, g die der Fläche. Doch war es bisher nicht gelungen, diese Beziehungen in ganz befriedigender Weise zu fassen. Ahlfors entwickelt hier eine Theorie der Überlagerungsflächen, die diese Lücke schließt und zugleich wertvolle und allgemeine Aussagen zum Typenproblem der Riemannschen Flächen liefert, welche seine früheren Ergebnisse umfassen (vgl. dies. Zbl. **3**, 407, **4**, 118, **8**, 262 und besonders **6**, 262). Die Beweise sind nun von entbehrlichem funktionentheoretischem Beiwerk befreit und methodenrein gegliedert in einen metrisch-topologischen und einen konformen Teil. — Zu einer gegebenen Grundfläche W_0 (man denke z. B. an die Vollkugel oder die mehrfache gelochte Kugel) wird eine endliche Überlagerung W betrachtet; die Metrik von W_0 überträgt sich auf W ; S be-

zeichne den Quotienten der Flächeninhalte W/W_0 in dieser Metrik, oder m. a. W. die mittlere Blattzahl von W , L die Länge des relativen Randes von W gegen W_0 . Dann gibt es eine nur von W_0 und seiner Metrik, aber nicht von W abhängige Konstante k , so daß die mittlere Überdecktheit $S(\Delta)$ eines Teilbereichs Δ von W die Überdeckungsungleichung

$$|S(\Delta) - S| < kL \quad (\text{I})$$

erfüllt; Entsprechendes gilt für die Überdecktheit eines Kurvenbogens von W_0 . — Bezeichnen ferner ϱ_0 und ϱ die (topologischen) Charakteristiken von W_0 bzw. W , so gilt der metrisch-topologische Hauptsatz

$$\varrho^+ = \max(\varrho, 0) \geq \varrho_0 S - kL. \quad (\text{II})$$

Diese zwei Sätze entsprechen im wesentlichen den beiden Hauptsätzen der Nevanlinnaschen Wertverteilungslehre. — Nimmt man für W_0 die mit q Löchern A_1, \dots, A_q versehene Kugel, so wird $\varrho_0 = q - 2$ und (II) erst für $q \geq 3$ nicht-trivial (wie auch der 2. Hauptsatz). Stanzt man nun aus einer gegebenen Überlagerung der Kugel die Δ_κ aus, so ergibt sich das ϱ^+ für die Restfläche W im wesentlichen aus den Anzahlen $p(\Delta_\kappa)$ der ausfallenden „Inseln“; man erhält

$$\sum_{\kappa=1}^q p(\Delta_\kappa) \geq (q-2)S - kL. \quad (\text{IIa})$$

Geht man nun zu einer offenen Überlagerungsfläche der Kugel bzw. von W_0 über, so wird man sie durch eine Folge endlicher Überlagerungen ausschöpfen; kann eine solche Ausschöpfung so gewählt werden, daß dabei $L/S \rightarrow 0$ strebt, so heiße sie regulär; man erkennt unschwer, daß sich jede Riemannsche Fläche vom Grenzpunkttypus regulär ausschöpfen läßt. — Sind nun etwa alle Inseln über Δ_κ mindestens m_κ -blättrig und gilt dabei

$$\sum \frac{1}{m_\kappa} < q - 2 \quad \text{oder} \quad \sum \left(1 - \frac{1}{m_\kappa}\right) > 2, \quad (\text{IIb})$$

so lehrt (IIa) die Unmöglichkeit von $L/S \rightarrow 0$, so daß eine solche Fläche notwendig zum Grenzkreistyp gehört. Das sind die Scheibensätze, welche in speziellen Fällen in den obengenannten Arbeiten des Verf. entwickelt sind. — Der Anschluß an die Nevanlinnasche Wertverteilungslehre wird unschwer hergestellt, indem die Kugel mit sphärischer Metrik zugrundegelegt wird und ihre offenen von meromorphen Funktionen $f(z)$ erzeugten Überlagerungsflächen durch Flächen W_r ausgeschöpft werden, die $|z| \leq r$ entsprechen. Dann ist die (funktionentheoretische) Charakteristik $T(r, f)$ mit $S(r)$ verknüpft durch

$$T(r, f) = \int_0^r S(t) \frac{dt}{t}. \quad (\text{III})$$

Da diese Theorie Aussagen über das Verhalten von $f(z)$ einzelnen Werten a_κ gegenüber liefert, hat man die obigen Scheiben Δ_κ auf Punkte a_κ zusammenschrumpfen lassen. Man bemerke noch, daß die Wertverteilungslehre erst Aussagen über Mittelwerte $N(r, a)$ der a -Stellenanzahlen $n(r, a)$ liefert, die nach dem Schema (III) gebildet sind; die Ahlforssche Theorie dagegen liefert unmittelbare Aussagen über die Anzahlen selbst. Sie erkaufte dies zwar mit einer Verschlechterung in der Größenordnung des Restgliedes [von $O(\log T(r))$ auf $O(S(r^\alpha))$ mit $\alpha = \frac{1}{2} + \varepsilon$], aber dies ist eine geringe Einbuße. — Im Vergleich zur großen Tragweite der Ergebnisse und zu dem Umfang des Beweiswerks in der Nevanlinnaschen Theorie müssen die Beweise als einfach bezeichnet werden.

Ulrich (Göttingen).

Scorza Dragoni, Giuseppe: Sull'equazione di Laplace in due variabili complesse. Mem. Accad. Ital. 6, 1229—1239 (1935).

Dans l' S_4 réel (x, u, y, v) , représentatif de deux variables complexes $\xi = x + iu$, $\eta = y + iv$, considérons un morceau V de variété réelle à deux ou trois dimensions, remplissant des hypothèses convenables. L'a. donne d'abord des conditions différen-

tielles, nécessaires et suffisantes afin qu'une fonction complexe et holomorphe des points de V soit subordonnée sur V par une fonction w de ξ, η , holomorphe dans un voisinage quadridimensionnel de V et satisfaisant à l'équation de Laplace: $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0$. — Une telle fonction w admet comme partie réelle (ou comme coefficient de i) une fonction φ réelle et holomorphe de x, u, y, v , qui jouit de la propriété caractéristique de vérifier le système suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} &= 0, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial u} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial v} &= 0, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial u} &= 0. \end{aligned}$$

Eh bien, l'a. donne aussi des conditions différentielles, nécessaires et suffisantes afin qu'une fonction analytique réelle, donnée sur un morceau V de variété analytique à trois dimensions ou sur une hypersurface analytique régulière fermée de S_4 , soit subordonnée par une fonction φ du type susdit, qui soit holomorphe respectivement dans un voisinage quadridimensionnel de V ou bien à l'intérieur et sur l'hypersurface fermée envisagée.

Beniamino Segre (Bologna).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Uno, Tosio, et Yosiharu Hasimoto: Sur le problème du battage des cartes. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 17, 224—233 (1935).

Das Problem von Poincaré über das „Kartenmischen“ wird von den Verff. wieder aufgenommen, und zwar unter der allgemeinen Voraussetzung, daß die Gewohnheiten der Spieler nicht konstant sind, sondern sich bei jeder Bewegung des Mischens ändern. Das Poincarésche Ergebnis, daß nach einer großen Zahl von Bewegungen alle $r = m!$ Permutationen der gleichen Wahrscheinlichkeit zustreben, wird auf den neuen Fall ausgedehnt unter der Bedingung, daß in den Matrizen der Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ik}^{(n)}$ ($p_{ik}^{(n)}$ = Wahrscheinlichkeit des Übergangs von der Permutation i zu der Permutation k bei der n -ten Mischbewegung) die Summen $\sum_i p_{ik}^{(n)}$ stets 1 ergeben. — Allgemeiner streben die Wahrscheinlichkeiten gegen $\alpha_k \left(\sum_h \alpha_h = 1 \right)$, wenn für jedes n die Größen $p_{ik}^{(n)}$ den r Gleichungen

$$\alpha_k - \sum_{i=1}^r p_{ik}^{(n)} \alpha_i = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

genügen. Der Beweis beruht auf der Zerlegung der Matrix $p^{(n)} = (p_{ik}^{(n)})$ in eine Summe $p^{(n)} = T + \varepsilon^{(n)}$ derart, daß $T \cdot \varepsilon^{(n)} = \varepsilon^{(n)} \cdot T = 0$ und ferner $T = T^2 = T^3 = \dots$ ist und infolgedessen $p^{(1)} \cdot p^{(2)} \cdot \dots \cdot p^{(n)} = T + \varepsilon^{(1)} \cdot \varepsilon^{(2)} \cdot \dots \cdot \varepsilon^{(n)} = T + \bar{\varepsilon}^{(n)}$ wird, wobei gezeigt wird, daß $\bar{\varepsilon}^{(n)}$ gegen Null strebt. Natürlich muß man voraussetzen, daß die übliche Bedingung $p_{ik}^{(n)} \geq \delta > 0$ erfüllt ist.

Bruno de Finetti (Trieste).

Mittmann, Otfried: Mathematisch-statistische Untersuchungen zur Erforschung fließender Merkmale. Göttingen: Diss. 1935. 56 S. u. 5 Fig.

As opposed to the sharply contrasted manifestations of unit characteristics familiar in the traditional Mendelian theory, "fluent" characteristics vary continuously over a frequency range. One may introduce arbitrarily one or more cuts dividing the distribution into frequency sub-classes. The author treats of the cases of one and of two cuts for monohybrid inheritance. A given individual is then of one of the three genetic types AA, Aa, aa , with respect to a single Mendelian character. In certain cases, there are manifested correspondingly three nonoverlapping sub-classes of measured somatic form. In the cases of chief interest for the author, there is extensive overlapping of these sub-classes. The problem of correctly inferring genetic composition from somatic measurement is treated as a problem in inverse probability. The theory is here developed to the extent of affording not only the most probable values but of indicating also measures of dispersion therefrom. Two illustrative ex-

amples are provided. The paper closes with 18 pages of tables for dealing with parentage for monohybrid inheritance using a single cut to separate lower and upper sub-classes of a measured fluent Mendelian characteristic. This application of inverse probability with continuous distributions seems to open a new line to the biometric investigations of the inheritance of unit characteristics and calls for further observational data, and the eventual extension of the theory to polyhybrid inheritance.

Albert A. Bennett (Providence).

Strecker, Grace: On evaluating a coefficient of partial correlation. *Ann. math. Statist.* 6, 143—145 (1935).

Kullback, Solomon: A note on Sheppard's corrections. *Ann. math. Statist.* 6, 158—159 (1935).

● **Bonferroni, Emilio:** *Fondamenti di matematica attuariale. I. Matematica dell'interesse.* Anno-accademico 1933—34. Torino: F. Gili 1934. 320 pag.

Geometrie.

Heuser, Walter: Über die Möglichkeit finiter Geometrien und die Geltung der projektiven Lagebeziehungen in ihnen. Heidelberg: Diss. 1934. 43 S.

Inagaki, Takeshi: Postulates for the separation of point-pairs in the foundations of geometry. *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math.* 3, 1—14 (1935).

Ausgehend von der von K. Kunugi (Tōhoku Math. J. 37; dies. Zbl. 7, 385) gegebenen allgemeinen Definition der Zwischenrelation für Punkte von Streckenzügen gelangt der Autor zu einigen allgemeinen Axiomensystemen für die Trennungsrelation, deren Beziehungen zu den Rosinger-Huntingtonschen Axiomensystemen für die Trennungsrelation (*Proc. Amer. Acad. Arts Sci.* 67; dies. Zbl. 4, 147) ausführlich betrachtet werden.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Steck, M.: Über die Vertauschungsaxiome und Vertauschungskalküle. (*Deutsch. Math.-Vereinig., Bad Pyrmont, Sitzg. v. 11.—12. IX. 1934.*) *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 45, 67—70 (1935).

Verf. referiert nach einer ausführlichen Einleitung im wesentlichen den Inhalt seiner Arbeit: „Zur Struktur der Vertauschungsaxiome V_1 und V_2 “ (s. dies. Zbl. 10, 73).

R. Moufang (Frankfurt a. M.).

Garver, Raymond: A note on Bieberbach's trisection method. *J. reine angew. Math.* 173, 243—244 (1935).

Die von Bieberbach (vgl. dies. Zbl. 3, 216) angegebene Winkeldrittung mit dem Rechtwinkelhaken ist gleichwertig mit der dem Archimedes zugeschriebenen Einschiebungsmethode und mit der Winkeldrittung durch die Pascalsche Schnecke. Der Nachweis, den übrigens die beigelegte Figur ohne weiteres anschaulich liefert, wird nach einfachem analytischem Ansatz errechnet.

W. Ludwig (Dresden).

Garver, Raymond: Bieberbach's trisection method. *Scripta Math.* 3, 251—255 (1935).

Ausführliche Entwicklung des Inhaltes der gleichnamigen Note des Verf. im *J. reine angew. Math.* 173, 243—244 (1935); vgl. vorst. Ref. *W. Ludwig* (Dresden).

Thébault, V.: Sur les brocardiens d'un point du plan d'un triangle. *Gaz. mat.* 41, 121—122 (1935).

Thébault, V.: On spheres associated with the tetrahedron. *Amer. Math. Monthly* 42, 429—434 (1935).

Jolliffe, A. E.: A short proof of the double-six property. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 6*, 239—240 (1935).

Als Hilfssatz wird verwandt: Liegen von den 12 Schnittpunkten einer Kurve 3. und einer Kurve 4. Ordnung 6 auf einem Kegelschnitt, so liegen auch die übrigen 6

auf einem Kegelschnitt. Die Beweismethode wird weiter benutzt, um von einer Doppelsechse ausgehend alle 27 Geraden einer kubischen Fläche zu bestimmen. [Wegen der Literatur vgl. A. Ichida, Tôhoku Math. J. 32, 52—53 (1930).] *E. A. Weiss.*

Valiron, G.: Les théorèmes de M. Bloch sur la cycloïde de Dupin. Bull. math. Fac. Sci. et grandes Écoles 1, 293—303 (1934).

Die interessanten Sätze von A. Bloch über die Eigenschaften derjenigen Kreise und Kugeln, die in Verbindung mit den Kreisen von Villarceau an Dupinschen Zykloiden (= inverse Flächen eines Torus) auftreten und von Bloch unter beweistheoretischer Benutzung der Eigenschaften isotroper Geraden hergeleitet worden sind [J. de Math. 3 (1924)], werden vom Verf. in dieser bereits 1927 verfaßten Arbeit mit einfachen und direkten elementargeometrischen Methoden neu gewonnen.

Steck (München).

Gensch, Walter: Über die Darstellung von reellen räumlichen Projektivitäten durch Produkte von Spiegelungen. Rostock: Diss. 1935. 15 S.

Viola, Tullio: Su una rappresentazione piana dei complessi lineari. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 14, 99—110 (1935).

Der Verf. untersucht — unter Verwendung des Mayorschen Abbildungsverfahrens — Familien von Kräftesystemen, deren Koordinaten Linearkombinationen der gleichnamigen Koordinaten zweier oder dreier Grundsysteme sind. Die Abbildung eines Kräftesystems mit den Koordinaten X, Y, Z ; L, M, N besteht dabei aus zwei Geraden f, f' und zwei Punkten φ, φ' der als Bildebene verwendeten $x-y$ -Ebene. Die Gleichungen der einander parallelen Geraden f und f' sind: $xY - yX - N = 0$ bzw. $xY - yX + aZ = 0$, wobei a eine Abbildungskonstante ist. Die Koordinaten der auf einer durch den Ursprung gehenden Geraden gelegenen Punkte φ und φ' sind: $x = \frac{-M}{Z}$, $y = \frac{L}{Z}$ bzw. $x = \frac{aM}{N}$, $y = \frac{-aL}{N}$. Den aus zwei Grundsystemen durch Linearkombination abgeleiteten Kräftesystemen entsprechen Geraden f und f' , welche zwei Strahlenbündeln mit den Mittelpunkten C und C' angehören, sowie Punkte φ und φ' , welche zwei Punkt-reihen mit den Trägern c und c' angehören. Durch Angabe von C, C', c, c' ist die betrachtete Familie bestimmt, gibt man eines der Elemente f, f', φ, φ' eines Systems dieser Familie an, so können die anderen konstruiert werden. Die verschiedenen Ausartungen dieser Abbildung einer eindimensionalen Familie von Kräftesystemen werden untersucht. Es wird schließlich der Fall dreier Grundsysteme behandelt, wobei neben der vollständigen Abbildung des ersten die oben angedeutete Abbildung der aus zweitem und drittem gebildeten eindimensionalen Familie verwendet wird. Es wird gezeigt, wie man bei gegebenem f die übrigen Elemente eines Systems der zweidimensionalen Familie konstruieren kann.

Prager (Istanbul).

Dubnow, J.: Sur une généralisation de l'équation de Hamilton-Cayley et sur les invariants simultanés de plusieurs affineurs. Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg 2/3, 351—365 (1935).

Diese Arbeit enthält eine Verallgemeinerung der Hamilton-Cayleyschen Gleichung: $\varphi(P) = 0$, wenn P ein gemischter Affinor der Valenz Zwei ist und $\varphi(\lambda) = 0$ die charakteristische Gleichung von P darstellt. Sind P_1, \dots, P_n gemischte Affinoren der Valenz Zwei in einer E_n , so kann das symmetrische Produkt (mit Produkt ist Überschiebung über benachbarte Indizes gemeint) dieser n Affinoren als eine Summe von symmetrischen Produkten von k ($k < n$) dieser Affinoren geschrieben werden. Es wird n. l. bewiesen, daß das symmetrische Produkt von

$$\left(P_1 \delta_{\mu_1}^{\kappa_1} - P_1^{(\kappa_1)} \cdot (\mu_1) A \right), \dots, \left(P_n \delta_{\mu_n}^{\kappa_n} - P_n^{(\kappa_n)} \cdot (\mu_n) A \right),$$

wo A der Einheitsaffinor ist, verschwindet, wenn man dazu noch über $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ alterniert und über die Indizes $\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \mu_2, \dots, \kappa_n \mu_n$ faltet. Die in dieser Identität auftretenden skalaren Koeffizienten, Simultaninvarianten, sind angeschrieben. Sie

sind rationale Funktionen der Spuren von P, PP, \dots , usw. Die Beziehungen zwischen den Simultaninvarianten und Spuren werden auf den speziellen Fall ($P_{\nu}^{\kappa} = 0$ für $\kappa \neq \lambda$) angewandt. Man erhält dann eine Verallgemeinerung der Newtonschen Formeln, welche die Beziehungen zwischen p_i ($p_i = \sum_{1,2} \lambda_1 \dots \lambda_i$) und s_i ($s_i = \lambda_1^i + \dots + \lambda_n^i$) angeben.
J. Haantjes (Delft).

Differentialgeometrie:

Weatherburn, C. E.: On geodesic ellipses and hyperbolas. Math. Gaz. 19, 258 bis 259 (1935).

Weidmann, Franz: Über das Verhalten der Asymptoten- und der Krümmungslinien in besonderen Flächenpunkten. München: Diss. 1934. 42 S. u. 1 Taf.

Anglade, E.: Nouvelles recherches sur les surfaces réglées. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. 26, 65—185 (1934).

Le mémoire donne un développement complet des résultats en partie connus. Ch. I contient l'étude des surfaces réciproques et de quelques surfaces R réglées particulières (à ligne de striction circulaire etc.). Ch. II généralise en R les formules de Frenet et de Cesàro. La génératrice de R , celle du cône complémentaire et leur perpendiculaire commune remplacent la tangente, la binormale et la normale principale de la courbe; la courbure et la torsion sont $\frac{\sin \theta}{K}$ et $\frac{\cos \theta}{K'}$ où K et K' sont les paramètres de distribution de R et de sa réciproque et θ l'angle de la génératrice avec la ligne de striction. Ch. III développe quelques propositions sur l'intégration de l'équation des asymptotiques de R . Ch. IV examine la déformation de R et ch. V les congruences W aux nappes focales réglées.
S. Finikoff (Moscou).

Lilienthal, R. v.: Zur Theorie des Levi-Civitaschen Parallelismus. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 45, 119—144 (1935).

Bortolotti, Enea: Trasporti di specie superiore. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 225—231 (1935).

In Anlehnung an die Arbeit von Bompiani (dies. Zbl. 11, 418) bedient sich der Verf. eigener Arbeiten (dies. Zbl. 1, 168; 3, 322; 4, 415; 9, 273) um Übertragungen zu untersuchen, welche nicht nur 1. die Art, sondern auch 2. die Längen und Winkel der übertragenen Vektoren reproduzieren. Dabei muß man aber auf 3. die Zugehörigkeit der übertragenen Vektoren zu denselben Oskulationsräumen verzichten. Außerdem werden die Bompianischen Übertragungen (s. o.), welche den Bedingungen 1 und 3 Genüge leisten, einerseits verallgemeinert, andererseits von anderem Standpunkte aus erklärt. — Zu diesem Zweck werden die von Bompiani und Bortolotti (s. o.) untersuchten „Christoffelschen Symbole“ verschiedener Arten als Projektionsoperatoren benutzt und außerdem wird der untersuchte Vektor mittels der „Eulerschen“ Krümmungsaffinoren verschiedener Arten zerlegt.
Hlavatý (Praha).

Hombu, Hitoshi: Zur Theorie der unitären Geometrie. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. 3, 27—42 (1935).

Mit U_n soll eine X_n bezeichnet werden, welche auf komplex-konjugierte Urvariablen x^ν, \bar{x}^ν bezogen wird und in welcher die Metrik durch

$$ds^2 = L(x^\nu, \bar{x}^\nu, dx^\nu, d\bar{x}^\nu)$$

definiert wird, wo L eine reelle Funktion ist, die positiv-homogen vom ersten Grade in bezug auf dx^ν und $d\bar{x}^\nu$ ist. Der zugehörige Hermitesche Fundamentaltensor ist dann, so wie im gewöhnlichen Falle eines Finslerschen Raumes

$$g_{\lambda\bar{\mu}} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^\lambda \partial \bar{x}^\mu}.$$

Nach dem Vorbilde von Schouten und v. Dantzig [Math. Ann. 103, 319—346 (1930)] wird dann die Übertragung mit den Koeffizienten

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = g^{\bar{\mu}\nu} \frac{\partial g_{\lambda\bar{\mu}}}{\partial x^{\omega}}, \quad C_{\lambda\omega}^{\nu} = g^{\bar{\mu}\nu} \frac{\partial^3 L}{\partial \bar{x}^{\mu'} \partial x^{\lambda'} \partial x^{\omega'}} \quad (\text{und konj.})$$

eingeführt und die entsprechenden Identitäten für die Krümmungs- und Torsionsgrößen abgeleitet. Durch das Projektionsverfahren wird eine X_m in U_n zu U_m gestempelt, und zwar ist dieses Verfahren dem üblichen ganz analog. Dabei spielt hier aber neben dem Krümmungsaffinor $H_{\mu\lambda}^{\nu}$ noch $H_{\mu\lambda}^{\nu} x^{\lambda'}$ (und konj.) eine gewisse Rolle. Zum Schluß werden die U_n mit konstanten Krümmungs- und Torsionsgrößen mittels der Methode von Cartan untersucht. Wegen Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Hlavatý (Praha).

Hokari, Shisanji: Über die Übertragungen, die der erweiterten Transformationsgruppe gehören. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. 3, 15—26 (1935).

Mit x^{ν} sollen Koordinaten einer X_n bezeichnet werden ($\nu, \lambda = m+1, \dots, m+n$). Neben x^{ν} führt man noch überzählige Koordinaten y^a ($a=1, \dots, m$) ein. Die Konnexion sowie auch die Größen werden in bezug auf

$$a) \quad \bar{z}^a = \bar{z}^a(z^1, \dots, z^m), \quad b) \quad \bar{z}^{\nu} = \bar{z}^{\nu}(z^1, \dots, z^{m+n}) \quad (1)$$

in üblicher Weise definiert (vgl. T. Hosokawa, dies. Zbl. 11, 420 sowie 9, 37, und A. Kawaguchi, dies. Zbl. 8, 418). Hier hat man bequemlichkeitshalber $z^a \equiv y^a$ und $z^{\nu} \equiv x^{\nu}$ gesetzt. Der Verf. untersucht zwei Fälle. Erstens: Reduziert sich (1a) auf die Identität, so bekommt man eine direkte Verallgemeinerung der von Hlavatý (dies. Zbl. 8, 33) für $m=1$ untersuchten Geometrie, die ihrerseits als Spezialfall die von Wundheiler (dies. Zbl. 5, 25) entdeckte „kinematische“ Geometrie enthält. Zweitens kann man für $m=n$ die y^a als Urvariablen betrachten und statt (1) b) weniger allgemein die Transformationsweise

$$b) \quad x^{\nu} = \frac{\partial \bar{y}^{\nu-n}}{\partial y^{-n}} x^{\lambda} \quad (1')$$

vorschreiben. Dann ist wohl das Verhältnis $x^{m+1} : x^{m+2} : \dots : x^{m+n}$ als ausgezeichnetes Element eines Finslerschen Raumes anzusehen. Somit reduziert sich diese Geometrie auf die von Cartan (dies. Zbl. 8, 418) behandelte Geometrie eines Finslerschen Raumes (vgl. A. Kawaguchi, dies. Zbl. 2, 158; 6, 32; 8, 33; Hombu, dies. Zbl. 7, 328).

Hlavatý (Praha).

Astronomie und Astrophysik.

Kiepenheuer, K. O.: Zur Theorie der Sonnenkorona. Z. Astrophys. 10, 260—278 (1935).

The corona is assumed to form an envelope of highly ionised, macroscopically neutral, gas around the sun. It is known to be shielded by the lower parts of the atmosphere from the main part of the sun's magnetic field. The author seeks first to show that, if a portion of this shielding layer moves outward into the corona, it will tend to carry its magnetic field with it. This is explained by its high conductivity and assumed large extent. The author then supposes that a large number of such masses of gas are ejected with high velocity from all parts of the sun's surface. Owing to the effect mentioned, they have to be regarded as "magnetised", so each mass will move under the resultant magnetic field of all the others, together with the residual direct field of the sun, and the sun's gravitational field. If the shielding is sufficiently strong the effect of the sun's direct field may be neglected. Under these conditions the author studies the trajectories of the gas-masses. The aggregate of the trajectories is shown to depend essentially on a single parameter A , which depends on various factors including the velocity of projection. With a suitable choice of A it is shown that the set of trajectories reproduce very well the observed form of the

corona, especially that corresponding to sun-spot minimum. It is shown incidentally that, if the sun's field were not shielded, then the motions of prominences would be greatly modified by it. The physical implication of the theory are discussed, and the paper contains also a critical summary of existing data and theories about the corona.

W. H. McCrea (London).

Chandrasekhar, S.: On the effective temperatures of extended photospheres. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **31**, 390—393 (1935).

The general theory of extended photospheres has been given by Kosirev [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **94**, 430 (1934); this Zbl. **9**, 135] and Chandrasekhar (ibid. p. 444; this Zbl. **9**, 136). The present note derives explicit expressions for the emergent radiation intensity and the effective temperature for the particular cases $\kappa \rho \sim r^{-n}$, where κ is the absorption coefficient, ρ the density, and r the radius vector from the centre of the star, and n is constant. In the cases $n = 3, 5, 7$ the integral which appears in the results can be evaluated explicitly.

W. H. McCrea (London).

Severny, A.: On the distribution of energy-sources inside the stars. *Russ. astron. J.* **12**, 131—138 u. engl. Zusammenfassung 139 (1935) [Russisch].

The author makes an attempt to estimate the magnitude of the effect which the distribution of the energy sources inside a star in equilibrium state may have on the distribution of the mass. The calculation is carried out for three types of stellar models, viz. for a perfectly gaseous star, for a star consisting of degenerate gas and for a mixed model where a central core of degenerate gas is surrounded by an atmosphere of perfect gas. The effect of energy liberation produced by the process of "annihilation" of positrons and electrons predicted by Dirac is discussed whereby the conclusion is reached that centrally condensed massive stars should have hotter and denser cores which is in agreement with Milne and Cillie's results.

Kyryll Ogrodnikoff.

Strömgren, Bengt: The influence of electron captures on the contours of Fraunhofer lines. *Z. Astrophys.* **10**, 237—259 (1935).

This is a new and detailed study of the central intensities in stellar absorption lines. Attention is restricted to lines originating from a normal state of an atom or ion. The equation expressing the conservation of the number of atoms in any element of state $(E^{(k)}, \bar{E}^{(k)} + dE)$ of the broadened upper state, corresponding to such a line, is formulated. The processes by which an atom can enter this state are taken to be (1) absorption of radiation in the appropriate frequency range, the number of transitions being calculable by the theory of Weisskopf and Wigner [Z. Physik **63**, 54 (1930), etc.], (2) collisions which excite atoms from the ground state, (3) captures of free electrons into this state. The processes by which the atom can leave this state are the reverse of these, namely (1) emission of radiation, (2) collisions of the second kind, (3) photo-ionisation. Other processes, in particular fluorescence-coupling with other stationary states, are neglected. The author first assumes that local thermodynamic equilibrium exists in the stellar atmosphere, and derives from his conservation equation an expression for the emission coefficient of the atmospheric material. When he uses this in the equation of propagation of radiation it becomes formally the same as Eddington's equation for simultaneous absorption and scattering, but one of the parameters has now a different interpretation. The author then shows how the result has to be modified when the assumed conditions of local thermodynamic equilibrium do not apply. This is achieved mainly by the introduction of a new parameter Q whose value can be computed for the conditions applying to any particular case. The relevant transition probabilities are computed in the usual way using hydrogen-like atomic models. The author shows from these computations that the theory accounts for the observed central intensities of solar resonance lines of Na, Al, Ca, Ba, and Sr, and also the Balmer lines of hydrogen. Satisfactory qualitative results are obtained in other applications, particularly to multiplets, and to the variation of the central intensities of lines across the solar disc. Thus the theory appears to resolve the well-

known difficulties about the central intensities of stellar and solar absorption lines, and only awaits further quantum mechanical calculations of absorption coefficients in continuous spectra in order to make more refined comparisons with observation.

W. H. McCrea (London).

Tiercy, G.: Remarque sur l'équation différentielle du second ordre que l'on rencontre dans les cas d'équilibre polytropique des sphères gazeuses. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 17) 52, 76—78 (1935).

Tiercy, Georges: Sur l'équation différentielle générale du second ordre caractérisant l'équilibre thermodynamique des sphères gazeuses. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 17) 52, 79—82 (1935).

Smith, Sinclair: Some notes on the structure of elliptical nebulae. Astrophys. J. 82, 192—201 (1935).

Relativitätstheorie.

Ruse, H. S.: Gauss' theorem in a general space-time. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 144—158 (1935).

A singly infinite system of 3-spaces $f(x^0, x^1, x^2, x^3) = \text{const.}$ is chosen in space-time and the orthogonal trajectories (with unit tangent vector λ^i) are taken to be the world-lines of fundamental observers. The gravitational 4-force relative to the observer is $-\delta\lambda^i/\delta s$. By application of Green's Theorem in space-time the author shows that if f satisfies a certain partial differential equation (for which a geometrical interpretation is given), then

$$\int_S (-n_i g^i) dW_2 = -8\pi\beta \int_R (\lambda^i \lambda^j T_{ij} - \frac{1}{2} T) dW_3,$$

where S is a closed surface in $f = \text{const.}$, R the spatial volume enclosed by it, $-n_i g^i$ the outward normal component of gravitational force, β the gravitational constant, dW_2 and dW_3 "relative" surface and volume elements, and T_{ij} the energy tensor. This generalised form of Gauß' Theorem reduces to that given by Whittaker [Proc. Roy. Soc. London A 149, 388 (1935); this Zbl. 11, 377] when the field is statical. — In the case of a purely material field of zero pressure the integral on the right may be replaced by a sum of "potential masses".

J. L. Synge (Toronto).

Boneff, N.: Un univers en expansion „euclidienne“. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 30, 271—284 u. franz. Zusammenfassung 284 (1934) [Bulgarisch].

Maneff, G.: Le principe de la moindre action et la théorie de la relativité. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 30, 285—316 u. franz. Zusammenfassung 317—320 (1934) [Bulgarisch].

Walker, A. G.: Note on relativistic mechanics. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 170—174 (1935).

The author obtains a form of Poisson's equation valid in general relativistic mechanics. The problem is essentially a "local" one, all observations being made by one observer, who determines the apparent gravitational field in his vicinity by observing the motions of free particles. The apparent field of force in the neighbourhood of the observer at a certain instant can be derived from a potential V , which is proved to satisfy the equation $\nabla^2 V = 4\pi\gamma(2\varrho - \varrho_0)$

where γ is the constant of gravitation, ϱ_0 is the proper-density, and ϱ is the relative density measured by the observer.

Whittaker (Edinburgh).

Halpern, O.: A theorem connecting the energy momentum tensor with the velocity of propagation of waves. Physic. Rev., II. s. 48, 431—433 (1935).

Für den elektromagnetischen Energie-Impuls-Tensor S im Vakuum gelten die Beziehungen: $S_{ik} = S_{ki}$, $S^i_i = 0$, $\partial S_{ik}/\partial x_k = 0$. Es wird bewiesen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer durch einen Energie-Impuls-Tensor mit diesen drei

Eigenschaften beschriebenen Störung $= c$ sein muß. In Materie muß man an Stelle von S bekanntlich einen anderen Tensor einführen, und zwar entweder den von Minkowski, der unsymmetrisch ist, oder den von Abraham, dessen Divergenz nicht mehr verschwindet. Der physikalische Sinn dieser Verletzung einer der drei obigen Relationen ist, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Materie $< c$, nämlich $= c/\sqrt{\epsilon\mu}$ ist. Es wird die Frage aufgeworfen, ob nicht möglicherweise ein Tensor der richtige ist, für den die 1. und 3. Relation bestehen bleibt, aber $S^i_i \neq 0$ ist.

S. Flügge (Leipzig).

Synge, J. L.: The proportionality of energy and frequency for a photon in general relativity. *Quart. J. Math.*, Oxford Ser. 6, 199—204 (1935).

The author proves that, when a photon is emitted by one atom and absorbed by another in a gravitational field, the ratio energy/frequency is the same for emission and absorption. This result has been given in a paper by Kermack, McCrea and Whittaker (this Zbl. 6, 224), and the present paper is intended as an improvement on their work. Unlike them, the author identifies the energy of the photon with the changes in proper energy of the emitting and absorbing atoms, and this leads him to define the energy of a photon with momentum-energy vector M^i , relative to a particle whose world-line has a unit tangent vector λ^i , to be $E = -M_i\lambda^i$. He follows the earlier authors in representing the atoms by points in the 3-dimensional space, but avoids what he regards as an unsatisfactory feature of their work, namely the interpreting of the photon in terms of waves. With him the photon is represented 4-dimensionally by a narrow 2-dimensional ribbon of null geodesics joining the world-lines of the atoms. — The paper includes an improved proof of a theorem on null geodesics due to McConnell and Synge, and shows how a generalization of it given by Kermack, McCrea and Whittaker follows immediately. The theorem in question is expressed in the above-quoted Zbl. abstract by the equation $d(\eta_p \delta \xi^p)/d\lambda = 0$.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Veblen, Oswald: A conformal wave equation. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 21, 484—487 (1935).

The author introduces a generalized four-dimensional conformal geometry, in which a fundamental conformal tensor $g_{\sigma\tau}$ determines a conformal connection $C^{\tau}_{\sigma i}$ ($i, \sigma = 1, \dots, 4$; $A, B = 1, \dots, 4$; $\sigma, \tau = 0, \dots, 5$) in terms of which a conformal derivative is defined [with an affine index i ; see *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 21, 168—173 (1935); this Zbl. 11, 175]. Conformal tensors may be converted into four-component spinors. A spin connection Γ^A_{Bi} is introduced, and under certain special conditions a formula is obtained for the covariant differentiation of an arbitrary simple spinor of weight w . The wave equation is a linear combination of these covariant derivatives with appropriate matrices as coefficients and has the form

$$s'^j \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^j} + K_j \psi + a_i A_j \psi \right) = m \psi$$

where the matrices s' are of rank two, a and m are constants, and K_j depends on the Γ^A_{Bi} and the A_i behave like the components of an electromagnetic vector. The matrices in the ordinary Dirac equation are of rank four. The result is presumably equivalent to an equation developed by Dirac and to be published in the *Ann. of Math.* 37 (1936).

Struik (Cambridge, Mass.).

Mercier, André: Expression du second principe de la thermodynamique relativiste au moyen des nombres de Clifford. *C. R. Soc. Physique Genève* (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 17) 52, 112—113 (1935).

Quantentheorie.

● **Dirac, P. A. M.:** The principles of quantum mechanics. 2. edit. Oxford: Clarendon press 1935. 312 pag. 17/6.

● **Boutaric, A.:** *La physique moderne et l'électron.* Paris: F. Alcan 1935. 332 pag. Fres. 20.—

Jordan, P.: *Zur Quantenelektrodynamik. II. Über die Theorie der Paarzeugung.* Z. Physik 96, 163—166 (1935).

Es besteht nach den Untersuchungen von Pauli und Weisskopf [Helv. physica Acta 7, 709 (1934); dies. Zbl. 10, 135] eine weitgehende Analogie zwischen der Theorie der Paarzeugung bei Fermistatistik einerseits und Bosestatistik andererseits. Der mathematische Grund dafür ist nach Verf. darin zu erblicken, daß die Vertauschungsrelationen der bilinearen Größen, mit deren Hilfe das Mehrkörperproblem formuliert werden kann, weitgehend übereinstimmen. (I. vgl. dies. Zbl. 11, 378.) *Casimir.*

Wessel, W.: *Diracsche Spintheorie und nichtlineare Feldgleichungen.* Z. Physik 96, 520—533 (1935).

Im Bestreben, die Diracsche Gleichung durch kleine Zusatzglieder so abzuändern, daß eine engere Analogie zur klassischen Formel $u_k \ddot{u}_k = 0$ (Viererbeschleunigung senkrecht zur Vierergeschwindigkeit) herauskommt, wird der Verf. auf Beziehungen geführt, die der Bornschen Elektrodynamik verwandt sind. *P. Jordan* (Rostock).

Wataghin, G.: *Sulle relazioni di commutazione nell'elettrodinamica quantistica.* Nuovo Cimento, N. s. 12, 290—293 (1935).

Die Vertauschungsrelationen von Jordan und Pauli haben die Form

$$\Psi^*(\vec{x}', t', k') \cdot \Psi(\vec{x}'', t'', k'') + \Psi(\vec{x}', t', k'') \cdot \Psi^*(\vec{x}'', t'', k') = \delta_{k'k''} \cdot \delta(\vec{x}' - \vec{x}'')$$

($k', k'' = 1, 2, 3, 4$). Es wird eine Verallgemeinerung versucht, bei der zwei verschiedene Zeiten t' und t'' auftreten. Auf der rechten Seite der Gleichung tritt dann eine Matrix auf, die mit der „Dichtematrix“ aus Diracs Theorie des Positrons eng verwandt ist. *S. Flüge* (Leipzig).

Wataghin, G.: *Sulla teoria dei protoni e neutroni.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 703—708 (1935).

Zur Beschreibung des anomalen magnetischen Moments des Protons wird die Diracsche Wellengleichung durch ein Glied $\sum_{i,k} \sigma_{ik} F_{ik}$ (σ_{ik} Spintensor, F_{ik} elektromagnetische Feldstärke) ergänzt, was ohne Zerstörung der relativistischen Invarianz möglich ist. Der Koeffizient muß dann gleich der Differenz aus dem wirklichen Moment des Protons und dem „Kernmagneton“ $e\hbar/2Mc$ (e, M = Protonenladung und -masse, c Lichtgeschwindigkeit, \hbar Plancksche Konstante/ 2π) werden. Es wird ferner angenommen, daß die Wellengleichung des Neutrons denselben Term mit demselben Koeffizienten enthält. Dies würde bedeuten, daß sich das magnetische Moment des Protons und das des Neutrons um ein Kernmagneton unterscheiden. Dieses Resultat scheint durch die experimentellen Daten nicht mit Sicherheit widerlegt zu sein.

R. Peierls (Cambridge).

Kronig, R. de L.: *Zur Neutrinotheorie des Lichtes. II.* Physica 2, 854—860 (1935).

Die Transformation wird gesucht, die in Jordans Theorie des Strahlungsfelds von der Matrixdarstellung, worin die Besetzungszahlen der Neutrinozustände als Indizes gebraucht werden, zu einer Matrixdarstellung führt, in der die Lichtquantenzahlen Diagonalmatrizen sind. Es wird gezeigt, daß dieses Problem für jeden Energiewert für sich gelöst werden kann und hier auf eine Hauptachsentransformation von endlich vielen Dimensionen führt. Insbesondere wird hervorgehoben, daß es Neutrinofelder gibt, die einem verschwindenden Strahlungsfeld entsprechen, was für die Anwendbarkeit der Neutrinovorstellung bei der Deutung der β -Spektren wesentlich ist. (Vgl. dies. Zbl. 11, 378.) *O. Klein* (Stockholm).

Markow, M.: *Über das Diracsche Vektormodell für Multiplettspektren.* Physik. Z. Sowjetunion 7, 553—564 (1935).

Die Diracsche Theorie gibt einen einfachen Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie der Spinmomente zweier Elektronen. Es wird eine analoge Formel für die

Wechselwirkung der Bahnmomente aufgestellt und mit ihrer Hilfe die Hamiltonfunktion für äquivalente Elektronen bestimmt. Die Arbeit schließt eng an die Betrachtungen von van Vleck an [Physic. Rev. **45**, 405 (1934); dies. Zbl. **9**, 45]. Als Beispiele werden die Fälle p^n und d^2 untersucht. Einige Bemerkungen über die Möglichkeit der Übertragung auf nichtäquivalente Elektronen sind angefügt. *S. Flüge*.

Romaldès, Jean: Sur la constitution et les dimensions de l'électron. Prakt. Akad. Athénon **10**, 164—169 (1935).

Um dem Spin des Elektrons Rechnung zu tragen, wird das Modell eines rotierenden Zylinders für das Elektron vorgeschlagen, dessen Radius und Höhe von der Größenordnung h/mc sein sollen. *S. Flüge* (Leipzig).

Wigner, Jenő: On a modification of the Rayleigh-Schrödinger perturbation theory. Mat. termézet. Értes. **53**, 477—482 (1935).

Es wird gezeigt, daß eine von Brillouin [L. Brillouin, J. Physique **4**, 1 (1933); dies. Zbl. **6**, 191] vorgeschlagene Reihenentwicklung für die Störungsenergie aus einer Minimalforderung abgeleitet werden kann, woraus folgt, daß die Reihe — im Gegensatz zu der Rayleighschen Entwicklung — in jeder Näherung zu hohe Werte liefert. Da die ungeraden Reihenglieder stets negativ sind, so ist dieser Umstand für die Beurteilung der Konvergenz des Verfahrens wesentlich. *O. Klein* (Stockholm).

Vleck, J. H. van: On the cross section of heavy nuclei for slow neutrons. Physic. Rev., II. s. **48**, 367—372 (1935).

Die großen Wirkungsquerschnitte einiger Kerne für langsame Neutronen lassen sich als Resonanzphänomen verstehen: am Kernrand muß die Neutroneneigenfunktion einen Schwingungsbauch haben (vgl. H. A. Bethe, dies. Zbl. **11**, 426). Berechnet man aber das Potential im Kern aus dem Kraftgesetz zwischen Proton und Neutron der Wignerschen Theorie der leichten Kerne [Zahlwerte nach E. Feenberg, vgl. dies. Zbl. **12**, 45], so ergibt sich eine zu geringe Änderung des Schwingungszustandes am Kernrand mit wachsendem Kernradius, verglichen mit der empirischen Häufigkeit der großen Wirkungsquerschnitte an verschiedenen Stellen des periodischen Systems. Das Resultat wird nicht verbessert 1. durch Berücksichtigung des Austauschcharakters der Neutron-Proton-Kraft (es wird nebenbei bewiesen, daß die Streuung auch in diesem Fall näherungsweise als Einkörperproblem in einem festen Potential behandelt werden darf, was nicht trivial war), 2. durch Einführung einer Neutron-Neutron-Wechselwirkung, die mit den Massendefekten der leichten Kerne verträglich ist. Dagegen könnte eine größere Häufung der Maxima durch Berücksichtigung von Neutronen mit endlichem Drehimpuls relativ zum Kern erreicht werden. *C. F. v. Weizsäcker*.

Aston, F. W.: The story of isotopes. Science **82**, 235—240 (1935).

Fleischmann, R., und W. Bothe: Künstliche Kernumwandlung. Erg. exakt. Naturwiss. **14**, 1—41 (1935).

Goble, A. T.: The four vector problem and its application to energies and intensities in platinum-like spectra. Physic. Rev., II. s. **48**, 346—356 (1935).

Aufspaltungen und Intensitäten in den Multipletts platinähnlicher Spektren (abgeschlossene Schale mit einer Lücke + ein Elektron außerhalb abgeschlossener Schalen) werden nach der Quantenmechanik berechnet. Sowohl die elektrische Wechselwirkung als auch die magnetische zwischen Bahn und Spin sind berücksichtigt, wobei als Ausgangspunkt des Störungsverfahrens jj -Koppelung benutzt wird. Vergleich mit der Erfahrung ergibt befriedigende Übereinstimmung. *R. de L. Kronig* (Groningen).

Gordadse, G. S.: Über das Dreizentrenproblem. I. Z. Physik **96**, 542—545 (1935).

Bestimmung der Energie im Grundzustande des H_3^{++} -Ions, d. h. für ein Elektron im Felde dreier als fester Zentren angenommener Wasserstoffkerne. Die Rechnung wird nach der Ritzschen Methode ausgeführt, wobei als Wellenfunktionen Linearkombinationen von Wasserstoffatomfunktionen mit variabler Abschirmungskonstante

benutzt werden. Angabe der bei der Variation auftretenden Integrale für den Fall der symmetrisch linearen und der gleichzeitig dreieckigen Kernkonfiguration.

R. de L. Kronig (Groningen).

Fock, V.: Wasserstoffatom und nicht-euklidische Geometrie. (Vorl. Mitt.) Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 2, 169—188 u. deutsch. Text 179—187 (1935) [Russisch].

Das quantenmechanische Wasserstoffatomproblem wird auf die Theorie der vierdimensionalen Kugelfunktionen zurückgeführt, wodurch die Entartung hinsichtlich der azimutalen Quantenzahl verständlich wird. Es ergibt sich eine vereinfachte Behandlung einer Reihe von Atomproblemen, deren ausführliche Darstellung in der Phys. Z. d. Sowjetunion angekündigt wird.

O. Klein (Stockholm).

Bloch, F.: Double electron transitions in X-ray spectra. Physic. Rev., II. s. 48, 187—192 (1935).

Zur Erklärung der Satelliten der Röntgen-K-Linien werden (nach Richtmyer) Doppelsprünge betrachtet: Ein inneres und ein äußeres Elektron führen gleichzeitig Übergänge aus und ein einziges Lichtquant wird ausgestrahlt. Für die (qualitative) Rechnung wird die Entfernung des inneren Elektrons vom Kern als klein angesehen gegen die Entfernung des äußeren Elektrons vom Kern. Diskussion des $\text{Cu-K}\alpha_3$ -Satelliten.

Bechert (Gießen).

● **Henri, Victor: Méthodes spectrales pour la détermination de la structure des molécules.** (5. Conf., Univ. Liège, 20. XI. 1934.) Liège: Édit. E. D. K. 1934. 29 pag. et 12 fig.

Der erste Teil des Vortrages, in dem über an sich bekannte Dinge berichtet wird, bringt in allgemeiner übersichtlicher Form die wellenmechanischen Grundlagen für die im zweiten Teil dargestellten experimentellen Ergebnisse: Berechnung der Atomabstände, Atomanordnung, Trägheitsmomente, Elektronenzustände sowie Auffindung und Massenbestimmung von Isotopen aus den Spektren. Die bei der Deutung der Spektren auftretenden Schwierigkeiten (Zuordnung der Quantenzahlen) werden angegeben und der Weg zu ihrer Behebung skizziert. Inhalt: I. Berechnung der Rotations-, der Schwingungs- und der Elektronenenergie von Molekülen. II. Allgemeine Formel der Bandenspektren. III. Beispiele reiner Rotationsspektren. IV. Schwingungsspektren. V. Isotopie-Effekt. VI. Elektronenkonfiguration bei einigen Radikalen.

Henneberg (Berlin).

● **Debye, P.: Analyse de la structure moléculaire à l'aide de l'effet Kerr.** (12. Conf., Univ. Liège, 22. I. 1935.) Liège: Édit. E. D. K. 1935. 18 pag. et 12 fig.

Nach einer kurzen Darstellung der Grundzüge der Theorie von Voigt und der von Langevin, Born, Gans u. a. über den Kerreffekt in Gasen werden die Formeln für Refraktion und Kerrkonstante angegeben. Zu diesen Theorien muß noch die qualitative Theorie von Silberstein und bei polaren Molekeln die Beobachtung der Depolarisation des Lichtes herangezogen werden, um zwischen verschiedenen Lösungssystemen entscheiden und bei dreiachsigen Molekeln die Polarisierbarkeiten überhaupt einzeln berechnen zu können. Das Additionsgesetz der Polarisierbarkeiten gibt Aufschluß z. B. über die Struktur der Benzolderivate. — Der Kerreffekt in Flüssigkeiten liefert dann weitere Kenntnisse über ihre Struktur und die zwischen den Molekülen herrschenden Kräfte.

Henneberg (Berlin).

Hylleraas, Egil A.: Analytische Darstellung von Potentialen zweiatomiger Moleküle und ihre Bestimmung aus spektroskopischen Daten. I. Tl. Allgemeine Theorie. Z. Physik 96, 643—660 (1935).

In Erweiterung des bekannten Morseschen Ansatzes haben Rosen und Morse (dies. Zbl. 5, 330), Manning und Rosen [Physic. Rev. 44, 953 (1933)], Pöschl und Teller (dies. Zbl. 7, 136) analytische Darstellungen des Potentials für die Schwingung zweiatomiger Molekeln gegeben. Diese Ansätze werden hier einfacher und von allgemeinerem Gesichtspunkt aus behandelt, die Energiewerte durch direkte Lösung und mit der Phasenintegralmethode bestimmt. Da diese Ansätze den empirischen

Fällen nicht ganz angepaßt sind, wird ein erweiterter Ansatz mit 6 Parametern vorgeschlagen; die zugehörigen Energien werden nach der Phasenintegralmethode ausgerechnet und die Verwendungsmöglichkeit des Ansatzes illustriert. *F. Hund.*

Hylleraas, Egil A.: Analytische Darstellung von Potentialen zweiatomiger Moleküle und ihre Bestimmung aus spektroskopischen Daten. II. Tl. Anwendung auf die Moleküle CdH und N_2 . Z. Physik 96, 661—668 (1935).

Die Brauchbarkeit des Hylleraasschen Ansatzes (s. vorangeh. Ref.) wird an zwei typischen Molekeln erwiesen. *F. Hund (Leipzig).*

Falkenhagen, H.: Struktur elektrolytischer Lösungen. Erg. exakt. Naturwiss. 14, 130—200 (1935).

Kohler, Max: Dynamische Theorie der Kristallröntgeninterferenzen auf wellenmechanischer Grundlage. S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1935, 334—338.

Die Wechselwirkung zwischen den Atomen eines Kristalls und dem elektromagnetischen Feld der Strahlung wird durch ein (nichtdivergenzfreies) Vektorpotential beschrieben. Die Durchführung der quantenmechanischen Störungsrechnung zeigt, daß der Vorgang der Streuung sich durch eine dreifachperiodische Dielektrizitätskonstante beschreiben läßt, solange die Frequenz genügend von der der Absorptionskanten entfernt ist. *F. Hund (Leipzig).*

Ghosh, M.: On the theory of electron scattering by atoms. Philos. Mag., VII. s. 20, 234—242 (1935).

Die Streuung eines Elektrons durch ein Atom wird nach der Bornschen Methode berechnet; bei der Berechnung des in Betracht kommenden Matrixelementes wird die Integration nicht über den ganzen unendlichen Raum, sondern nur über das Gebiet außerhalb einer Kugel mit Radius r_0 erstreckt. Eine genauere Begründung dieses Verfahrens wird nicht gegeben. *Casimir (Leiden).*

Plesset, Milton S., and John A. Wheeler: Inelastic scattering of quanta with production of pairs. Phys. Rev., II. s. 48, 302—306 (1935).

Es wird folgender Vorgang diskutiert: Ein γ -Quant wird von einem Kern unelastisch gestreut; das gestreute Quant hat also eine kleinere Energie als das einfallende, und der Energieunterschied wird verwendet zur Paarerzeugung. Verff. behandeln das Problem nach der Bornschen Methode und begnügen sich mit einer Abschätzung der Größenordnung des Streuquerschnittes. Sie gelangen zu dem Schluß, daß der Effekt unter Umständen beobachtet werden könnte, daß er aber bei den Versuchen über anomale Streuung keine merkbare Rolle spielen kann. *Casimir.*

Kondratiew, V.: Zur Frage über den Wirkungsquerschnitt der Rekombination von Atomen unter Ausstrahlung. Z. eksper. teoret. Fis. 5, 250—253 u. deutsch. Zusammenfassung 254 (1935) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß die thermodynamische Beziehung zwischen der Wahrscheinlichkeit von Rekombination unter Ausstrahlung und dem inversen Prozeß, d. h. der Lichtabsorption mit Dissoziation für beliebige Temperaturen gilt. (Diese Tatsache ist evident, da die Wahrscheinlichkeit des Einzelprozesses unabhängig von der Temperatur definiert ist. D. Ref.) Es wird ferner die Ansicht ausgesprochen, daß die Rekombinationswahrscheinlichkeit nur von der ausgestrahlten Energie abhängt, d. h. dieselbe bleibt, wenn zwei Atome mit größerer Relativgeschwindigkeit in einen höheren Schwingungszustand rekombinieren, so daß die freiwerdende Energie die gleiche ist.

R. Peierls (Cambridge).

Belov, K.: Simultaneous action of magnetisation and elastic stresses on the thermoelectromotive forces of ferromagnetics. Z. eksper. teoret. Fis. 5, 396—400 (1935) [Russisch].

Aus einer phänomenologischen Theorie der Leitungserscheinungen in ferromagnetischen Körpern wird abgeleitet, daß die Einwirkung von Magnetisierung und Deformation auf die Thermokraft nicht additiv sind, sondern daß es ein Zusatzglied gibt,

welches der elastischen Deformation und dem Quadrate der Magnetisierung proportional ist.

R. Peierls (Cambridge).

Kristallographie.

● **Internationale Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen. Bd. 1 u. 2.** Berlin: Gebr. Borntraeger 1935. 692 S. RM. 33.—.

Niini, Risto: Über die Stabilität dichtester Kugelpackungen. *Ann. Acad. Sci. Fennicae A* 39, Nr 10, 1—21 (1934).

Unter dichtesten Kugelpackungen werden solche verstanden, die die Koordinationszahl 12 haben. Da die sog. hexagonale und kubische dichteste Kugelpackung geometrisch besonders ausgezeichnet sind, war zu erwarten, daß auch die zu berechnenden Stabilitäten dieser Kugelpackungen ausgezeichnete Werte annehmen würden. Dies ist tatsächlich der Fall. Es wurde gefunden, daß sich bei Verwendung verschiedener üblicher Potentialansätze [z. B. $f(r) = -\frac{C}{r^n}$, $f(r) = -Ce^{-cr}$, $f(r) = -Ce^{-cr^2}$, $f(r) = -\frac{\alpha}{r^m} + \frac{\beta}{r^n}$ usw.] für die sog. dichteste hexagonale Packung die größte und für die kubische (mindestens in vielen Fällen) die kleinste Stabilität ergibt. *F. Laves.*

Reinicke, Richard: Über einige hochsymmetrische, der Kugel einbeschriebene 120-Eckner. *Z. Kristallogr. A* 90, 446—456 (1935).

Es wird ein Verfahren mitgeteilt und an 4 verschiedenen 120-Ecknern durch Figuren erläutert, der Kugel hochsymmetrische Vieleckner einzubeschreiben.

F. Laves (Göttingen).

Haag, F.: Die den Zahlen von 1 bis 100 im kubischen Gitter zugeordneten Vielecke. *Z. Kristallogr. A* 90, 456—466 (1935).

Die Zahlen 1 bis 100 sind, soweit möglich, in Summen von drei Quadratzahlen zerlegt worden. Die drei Zahlen als Koordinaten aufgefaßt, stellen die Eckpunkte hochsymmetrischer in eine Kugel einschreibbarer Vieleckner dar. Diese sind für die Zahlen 1 bis 100 explizit tabuliert worden.

F. Laves (Göttingen).

Kleber, Willi: Neuere Fragen zu den Grundlagen der theoretischen Kristallographie. *Naturwiss.* 23, 606—608 (1935).

Ungemach, H.: Sur les avantages de l'emploi des notations à quatre caractéristiques pour les cristaux de symétrie rhomboédrique. *Z. Kristallogr. A* 91, 97—113 (1935).

Es wird auf den Vorteil viergliedriger Indizierung rhomboedrischer Kristalle hingewiesen. Die Nützlichkeit des Verfahrens wird durch Beispiele erläutert.

F. Laves.

Nath, N. S. Nagendra: The dynamical theory of the diamond lattice. III. The diamond-graphite transformation. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 2, 143—152 (1935).

II. vgl. dies. *Zbl.* 11, 382.

Klassische Theorie der Elektrizität.

Kosten, L.: Anwendung eines operatorischen Entwicklungssatzes in der Theorie der Ausgleichvorgänge auf homogenen Leitungen. *Elektr. Nachr.-Techn.* 12, 231—236 (1935).

Verf. untersucht eine homogene Leitung, wobei außer Selbstinduktion und Kapazität nur Widerstand vorhanden ist, aber keine Ableitung. In den Differentialgleichungen werden lineare Störungsglieder angenommen. Verf. wendet auf diese Differentialgleichungen die Grundformel der Operatorenrechnung an und erhält so die Lösung als unendliches Integral. Durch Reihenentwicklung des Operators erhält er eine einfache Reihe, welche den Zusammenhang zwischen den Strömen im allgemeinen und im verlustlosen Falle (Leitungswiderstand = Null) darstellt. Im einzelnen betrachtet er dann noch die Fälle, daß eine aufgeprägte Spannungsstörung, eine aufgeprägte

Stromstörung, wobei bzw. Spannung und Strom gesucht werden und zuletzt den Fall, daß eine Stromstörung aufgeprägt wird und die Spannung gesucht ist.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Lettowsky, F.: Skineffekt in zylindrischen Leitern mit elliptischem Querschnitt. Arch. Elektrotechn. 29, 556—567 (1935).

Nach einer Einleitung über die Grundgleichungen der Stromverdrängung sowie über die Berechnung des Wechselstromwiderstandes nach dem Poyntingschen Satze führt Verf. elliptische Koordinaten ein und setzt für das magnetische Vektorpotential im Außenraum sowie im Leiterinnern je eine Reihe an mit zunächst unbekannten Koeffizienten, welche nach Kreisfunktionen von Vielfachen der elliptischen Winkelkoordinate fortschreiten. Im Leiterinnern enthalten die Reihenglieder der Besselschen Funktionen der elliptischen Abstandskoordinate, im Leiteräußern Exponentialfunktionen dieser Koordinate. Aus den Grenzbedingungen an der Leiteroberfläche erhält Verf. ein Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten. Er berechnet die Lösungen dieses Gleichungssystems bei niedrigen Frequenzen, wobei besagte Besselfunktionen bzw. Exponentialfunktionen in Potenzreihen entwickelt werden. Auf diese Weise erhält er die unbekannten Koeffizienten bis zum vierten einschließlich. Die Ausdrücke sind unübersichtliche numerische Aggregate von Exponentialfunktionen. Aus dem magnetischen Vektorpotential berechnet Verf. dann die Verteilung der Wechselstromdichte über den Leiterquerschnitt und hieraus bis in dritter Näherung den Wechselstromwiderstand und die innere Selbstinduktion. Er zeigt, daß für kleine Exzentrizitäten im Grenzfall des kreisförmigen Querschnitts die Formeln in die bekannten übergehen.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Searle, G. F. C.: The magnetic force at a point on its axis due to a current in a helical coil of one turn. Proc. Phys. Soc., London 47, 900—903 (1935).

Gegeben ein schraubenförmiges Drahtstück auf einem Kreiszyylinder, das gerade einmal um den Zylinder herumläuft. Es sei zu einem geschlossenen Stromkreis ergänzt durch ein gerades Drahtstück längs einer Erzeugenden des Zylinders; durch den Kreis fließe ein Strom. Das Magnetfeld in irgendeinem Punkt auf der Zylinderachse wird für den Fall berechnet, daß die Steigung der Schraubenlinie klein gegen den Radius des Zylinders ist.

Bechert (Gießen).

Odono, Filippo: Effetto Volta ed effetto Peltier. Nuovo Cimento, N. s. 12, 273 bis 284 (1935).

Aus der von Duhem (Leçons sur l'électricité et le magnétisme. Paris: Gauthier-Villars 1891) gegebenen thermodynamischen Theorie der elektrischen Erscheinungen in metallischen Leitern wird die Existenz eines äußeren und eines inneren Voltaeffektes abgeleitet, ferner eine Potentialdifferenz zwischen Metallinnerem und Metalloberfläche, und der Peltiereffekt. Beziehungen zwischen diesen Erscheinungen werden aufgestellt. Der Koeffizient des Peltiereffektes mißt nicht die Kontakt-Potentialdifferenz.

Bechert (Gießen).

Piekara, A.: Contribution à la théorie de l'influence du champ magnétique sur la constante diélectrique des gaz et des liquides diamagnétiques. I. Acta Physica Polon. 4, 53—64 (1935).

Piekara, A.: Contribution à la théorie de l'influence du champ magnétique sur la constante diélectrique des gaz et des liquides diamagnétiques. II. Acta Physica Polon. 4, 73—77 (1935).

Piekara, A.: Théorie de l'effet du champ magnétique et électrique sur la constante diélectrique. Acta Physica Polon. 4, 163—176 (1935).

Sona, Luigi: Sulle vibrazioni elettromagnetiche di carattere armonico semplice. Atti Ist. Veneto Sci. etc. 94, 297—307 (1935).

The writer deduces, from Maxwell's equations and the appropriate conditions for orthogonality of the electromagnetic vectors, that "the propagation of electro-

magnetic waves of simple harmonic type is not possible in the space exterior to a given spherical surface". In a recent paper (see this Zbl. 10, 95) he treated the more general case of any convex surface, but he now finds that that discussion was not valid, as Love's conditions for the orthogonality of the electromagnetic vectors were not fully applicable.

M. Slow-Taylor (Slough).

Erdélyi, Artur: Über die freien Schwingungen in Schwingungskreisen mit periodisch veränderlicher Selbstinduktivität. Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. 46, 73–77 (1935).

Verf. erhält für den elektrischen Strom im Schwingungskreis eine Differentialgleichung vom Hillschen Typus. Er unterscheidet bei der Lösung dieser Differentialgleichung in üblicher Weise für die Parameter stabile und instabile Werte, wobei die ersteren einem ungedämpften, die zweiten einem anwachsenden Stromwert entsprechen. Zunächst untersucht er den Fall langsamer Selbstinduktivitätsschwankungen, welcher dadurch gekennzeichnet ist, daß die Frequenz dieser Schwankungen klein ist gegen die Eigenfrequenz des Kreises. In diesem Fall gilt eine einfache Näherungslösung der Differentialgleichung, woraus sich ergibt, daß im allgemeinen ungedämpfte bzw. gedämpfte Schwingungen auftreten, aber fast nie anwachsende. Als zweiten Fall betrachtet er schnelle Selbstinduktivitätsschwankungen, dadurch gekennzeichnet, daß obige Bedingung für die Frequenz dieser Schwankungen nicht erfüllt ist. In diesem Fall löst er die Hillsche Differentialgleichung mit Hilfe der Hillschen Determinante (vgl. Erg. Math. 1, H. 3), deren zwei zentrale Zeilen und Spalten er benutzt, um zu einer Näherung zu gelangen. Die so gewonnene Lösung wendet er auf einen bereits früher von Winter-Günther betrachteten Fall an und erhält die Bedingungen, unter denen Selbsterregung des Kreises auftritt. Eine von Winter-Günther experimentell aufgenommene Stromkurve als Funktion der Zeit läßt sich gut durch die obengenannte Näherungslösung verstehen. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Noether, F.: Elektromagnetische Wellen an einem Draht, bei konzentrierter Energiequelle. Physik. Z. Sowjetunion 8, 1–24 (1935).

Verf. befaßt sich mit der strengen Berechnung des rotationssymmetrischen elektromagnetischen Feldes im Innern und im Äußern eines kreiszylindrischen als unendlich lang angenommenen Drahtes endlicher Leitfähigkeit, wobei als primäre Energiequelle ein magnetischer Wechselfluß angenommen wird, dessen Kraftlinien die Drahtachse in senkrecht zu diesen gelegenen konzentrischen Kreisen umschließen. Er geht aus von der Wellengleichung des elektromagnetischen Vektorpotentials (Hertzschen Vektors), wobei die Definition von A. Sommerfeld benutzt wird. Aus der Kreissymmetrie des primären Feldes folgt sogleich dieselbe Eigenschaft des Gesamtfeldes. Der Hertzsche Vektor hat nur eine Komponente, welche tangential zu den obengenannten Kreisen der magnetischen Kraftlinien verläuft. Das Gesamtfeld wird beschrieben durch einen primären und einen sekundären Hertzschen Vektor. Für das primäre Feld wird eine Integraldarstellung mit unendlichem Integrationsweg angegeben, welche in einfacher Weise folgt aus der Entwicklung des Quellenausdrucks $\exp(ikR)/R$ nach Besselschen bzw. Hankelschen und Kreisfunktionen. Für das sekundäre Feld wird eine analoge Darstellung aufgestellt, wobei zunächst eine unbekannte Funktion unter dem Integralzeichen eingeführt wird, die dann aus den Grenzbedingungen auf der Leiteroberfläche sowie aus dem bereits genannten Ausdruck für das primäre Feld eindeutig erhalten wird. Das Integral für das Gesamtfeld wird sodann zunächst unter der Voraussetzung diskutiert, daß der Draht eine unendliche Leitfähigkeit besitzt, wobei der Brechungsindex rein imaginär wird. Durch Verlegung des Integrationsweges gelingt es, mittels einer einfachen Substitution einen asymptotischen Ausdruck für den Hertzschen Vektor herzuleiten, welcher für große Abstände von der Energiequelle gilt. Aus diesem Ausdruck für den Hertzschen Vektor wird sodann das elektromagnetische Feld berechnet und diskutiert. Hierauf wird der Fall endlicher Leitfähigkeit betrachtet, wobei ebenfalls ein dem Obigen analoger asymptotischer Ausdruck für das Hertzsche Vektorpotential abgeleitet und sodann größenordnungsmäßig diskutiert wird. *Strutt*.

Efross, A. M.: Die Temperaturverteilung im Wechselstromleiter. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Méc., Univ. Kharkoff, IV. s. 11, 83—88 (1935).

In dieser Arbeit wird die Temperaturverteilung als Funktion vom Radius in zylindrischen Leitern mit ringförmigem Querschnitt bestimmt. Nach Aufstellung der Differentialgleichungen der Temperatur sowie für die elektrische Stromdichte, welche sämtlich bereits bekannt sind (z. B. Dissertation des Ref., Delft 1927) schreibt Verf. die Lösung an für die Fälle, daß 1. das magnetische Feld in Kreisen um die Achse verläuft und 2. das magnetische Feld axial gerichtet ist. Die Lösung enthält Besselsche Funktionen erster und zweiter Art mit komplexem Argument. Man vgl. auch die Arbeit des Ref. [Philos. Mag. 5, 904—914 (1928)]. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Eekart, G.: Der Einschaltvorgang wirbelstrombehafteter Eisendrosseln. Elektr. Nachr.-Techn. 12, 250—256 (1935).

Verf. betrachtet eine unendlich lange Eisendrossel der obengenannten Art, und zwar den ebenen und den kreisförmigen Fall. Die Lösungen für die Stromdichte sind bekannt. Beim Einschaltvorgang geht er vom Heavisidetheorem aus und erhält so für den Strom eine unendliche Reihe, wobei in den genannten obigen Fällen die Eigenwerte der Lösungen in den Reihengliedern auftreten. Die Reihe wird qualitativ diskutiert. Ein Beweis für die mathematische Anwendbarkeit des genannten Theorems auf den vorliegenden Fall fehlt. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Hoyt, Ray S., and Sallie Pero Mead: Mutual impedances of parallel wires. Bell Syst. Techn. J. 14, 509—533 (1935).

Verff. behandeln Systeme von Paralleldrähten, welche von Wechselströmen durchflossen werden, bei solchen Frequenzen und gegenseitigen Abständen, daß die ungleichmäßige Stromverteilung in den (runden) Querschnitten eine wichtige Rolle spielt für die Bestimmung der gegenseitigen und der Selbstinduktionen. Zur Berechnung der gegenseitigen Induktion zwischen zwei Drähten gehen Verf. von der Regel aus, daß dieselbe gleich der Summe der mit richtigen Gewichtungsfaktoren versehenen gegenseitigen Induktionen jedes Drahtelementes in einem Draht zu jedem Element im anderen ist, wobei der Gewichtungsfaktor das Produkt der entsprechenden zwei Elementarströme ist. Die Selbstinduktion eines Drahtes wird in entsprechender Weise berechnet, wobei auch die mit richtigem Gewichtungsfaktor versehene gegenseitige Induktion jedes Drahtelementes sich selber gegenüber in Betracht zu ziehen ist, während die Gewichtungsfaktoren entsprechend wie oben gebildet werden. Diese Theorie wird numerisch angewandt auf ein System von 4 runden Paralleldrähten, von denen je zwei eine Schleife bilden. Nach Berechnung der Stromverteilung ergibt sich durch sukzessive Näherung die gegenseitige und die Selbstinduktion. Die Formeln werden numerisch ausgewertet.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Pol, Balth. van der: Theory of the reflection of the light from a point source by a finitely conducting flat mirror, with an application to radiotelegraphy. Physica 2, 843 bis 853 (1935).

When the source of radiation is a dipole (electric or magnetic) the appropriate Hertzian function consists of the sum of three parts representing respectively the original waves, the reflected waves obtained in the case of an infinitely conducting mirror and a space integral in which one factor of the integrand is $\frac{\partial^2}{\partial z^2} (e^{ik_2 r}/r)$. The integration extends over the part of space occupied by the second medium below the geometrical image. The field in the first medium apart from the direct radiation from the point source, can be described as due to secondary waves originating in the integration space with an amplitude determined by radiation from the geometrical image according to laws appropriate to an infinite medium with the absorption and velocity constant of the second medium. *H. Bateman* (Pasadena).

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Brillouin, Léon: Thermodynamique et géométrie affine. *J. Physique Radium*, VII. s. 6, 359—360 (1935).

Tous les diagrammes de la thermodynamique relèvent de la géométrie affine; des grandeurs p , v , T , n'ayant aucune commune mesure définissent un espace sans ds^2 ; c'est ce qui explique les notations si caractéristiques des dérivées partielles thermodynamiques.

Autoreferat.

Schmolke, Heinrich: Über die Bezeichnung des Wärmesatzes von Nernst als drittes Gesetz der Thermodynamik. *Z. Elektrochem.* 41, 654—657 (1935).

Bružs, B.: Thermo-dynamics of stationary systems. I. The thermo-element. *Proc. Roy. Soc. London A* 151, 640—651 (1935).

Bružs, B.: Thermo-dynamics of stationary systems. II. The diffusion element. *Proc. Roy. Soc. London A* 151, 651—665 (1935).

Dupont, Yvonne: La synthèse thermodynamique de Th. De Donder appliquée aux effets transversaux Nernst et Ettingshausen. (III. comm.) *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 21, 703—707 (1935).

I, II vgl. dies. Zbl. 11, 142, 236.

Kimball, W. S.: The limaçonoidal heat conductivity distribution function. *Philos. Mag.*, VII. s. 20, 97—128 (1935).

In this paper the author uses the same methods as in a former paper *Philos. Mag.* 16, 1—49 (1933) already reviewed this Zbl. 7, 275. This is called "the geometrical weight method, that relies on stresses and strains in velocity and ordinary space". "Hence the conclusions all rest on Newtonian mechanics and elasticity theory, and probability is just incidental." "Neither mean free paths, on the one hand, nor the intermolecular force factors of Chapman and Enskog, appear in the formulas." The paper is open to criticisms similar to those made on the earlier paper, and the work does not seem worthy to be considered a serious and well grounded contribution to the subject with which it deals.

S. Chapman (London).

Derewjankin, S., A. Obnorsky und T. Parfentjew: Die thermodynamischen Eigenschaften der reellen Gase auf Grund der vereinfachten Jaenynaschen Zustandsgleichung (He, Ne, H₂). *Acta Physica Polon.* 4, 37—51 (1935).

Burnett, D.: The distribution of velocities in a slightly non-uniform gas. *Proc. London Math. Soc.*, II s. 39, 385—430 (1935).

This important paper deals with the problem already solved in different ways by Chapman and by Enskog independently, and earlier, in special cases, by Maxwell and Lorentz. The general solution obtained by Chapman for the velocity distribution function involved certain power series in the square of the molecular velocity, and expressions were derived from this series for the coefficients of viscosity, thermal conduction and diffusion. Enskog, basing his work on Boltzmann's equation, obtained formulae equivalent to those found by Chapman through the use of Maxwell's method of transfer. The present paper affords no new physical results, but makes a valuable advance in the mathematical technique of the problem. This comes by substituting series of Sonine polynomials in the square of the velocity for the power series used by Chapman. The case of Maxwellian molecules is particularly simple on account of certain orthogonal properties of those polynomials, and in the general case, where the molecules exert forces on one another inversely proportional to the n th power of the distance, the calculations can be carried out without the elaborate expansions necessary in Chapman's method; the investigation of the convergence of the series obtained presents no difficulties and the computation, although essentially the same as in Chapman's papers, is materially lightened by the form in which the results are obtained. The paper is divided into two parts, the first giving the required properties of Sonine's polynomials, while the second contains the main results given by Chapman

and Enskog. The author's methods will be of material aid in the later approximations to the theory, important in the case of rarefied gases. *S. Chapman* (London).

Herzfeld, K. F.: Untersuchungen über die kinetische Theorie der Gase. I. Schallabsorption. *Ann. Physik*, V. F. 23, 465—475 (1935).

Herzfeld, K. F.: Untersuchungen über die kinetische Theorie der Gase. II. Die allgemeinen Gleichungen der Bewegung und der Wärmeleitfähigkeit und ihre Anwendung auf Gleitung und Temperatursprung. *Ann. Physik*, V. F. 23, 476—492 (1935).

At the outset of the first paper the author points out certain discrepancies between experiment and theory as regards the absorption of sound in a gas. The absorption is greater than is accounted for by viscosity and thermal conduction, even in helium, where no question arises of redistribution of energy between translatory and internal degrees of freedom. Hence the author decides to examine whether the velocity gradient during sound propagation is so high that departures from the ordinary equations of viscosity and conduction become important. At the close of his mathematical discussion he states that his "new correction terms are presumably too small to explain the experimental results". No experimental data are given, nor are any numerical calculations shown, perhaps partly because only the form of the extended expression for the absorption is determined, the coefficients occurring in it not being evaluated. — The first paper is thus almost wholly devoted to finding the form of the equations of motion and heat conduction in a gas, to a higher degree of approximation than is usual his work partly covers the same ground as previous work by Brillouin, (Lennard-) Jones, Enskog and Rocard, being in some respects a repetition, in others an extension of their work, but in any case limited by supposing the mean motion to be unidirectional. — In the second paper this restriction is removed. The form of the extended equations is found by use of Boltzmann's integral equation for the velocity distribution function, and by applying the principle of invariance of the expressions in transformation by rotation of the axes — a method first used by Brillouin, who, however, like the author, did not determine the form of the coefficients. This requires the use of the methods of Enskog and Chapman, recently improved by Burnett (cf. the prec. review); it seems desirable to carry out this work in a general and complete way once for all. — The main part of the second paper is devoted to the important and difficult question of the conditions in the gas near a plane boundary, when there is a linear gradient of velocity or temperature in the further regions occupied by the gas. Here little progress is made, though some of the difficulties involved are exposed. The question requires re-discussion with more powerful analytical methods. *S. Chapman* (London).

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Stoneley, R.: On the apparent velocities of earthquake waves over the surface of the earth. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl.* 3, 262—271 (1935).

The paper deals with the refraction and reflection of surface (Love) waves at the boundaries of continents. The wave velocities are calculated from the observed group velocities by numerical integration. Using observations by Rohrbach of three earthquakes recorded in Göttingen, the dispersion curves over Eurasia and over the Pacific basin are computed and compared. From Rohrbach's values of group velocities and the theory of Love-waves in a double surface-layer, a thickness of 15 km. is obtained for the granitic layer in Eurasia. A thickness of 10 km. is obtained for a single layer (if granite) in the Pacific. The effects of refraction at a continental boundary are found to influence arrival times by about one per cent or less, in general; although greater errors are possible. Refraction and reflection effects may cause pronounced weakening of the long wave phase, under favorable circumstances. They may also complicate the question of separating the Rayleigh-wave and Love-wave motions,

and serve to explain alleged anomalies observed in these waves between the direction of wave-displacements and the direction of wave-propagation. *L. B. Slichter.*

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: Amplitudes of dispersive Rayleighwaves at different depths of a body. *Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo* 12, 641—648 (1934).

Die Amplitude seismischer Oberflächenwellen nimmt von der Oberfläche nach dem Innern der Schicht hin ab, wobei das Abnahmegesetz bis zu einem gewissen Grade im geschichteten Mittel modifiziert ist. Für verschiedene Richtigkeit in den beiden Schichten ist das Verhältnis der Vertikal-/Horizontal-Bewegung an der Oberfläche, in der Mitte der Schicht und an der unteren Grenze gegeben, ferner das Verhältnis der einzelnen Komponenten in denselben Tiefen. Die Erscheinung, daß bei großem μ/μ' der Anteil der Horizontalbewegung zur Vertikalbewegung an der Oberfläche mit L/H (L = Wellenlänge, H = Mächtigkeit der Schicht) schwankt, scheint in der Brechung und Reflexion im geschichteten Medium bedingt zu sein. Für $L/H \sim 4$, $\mu/\mu' \sim 5$, sitzt die Energie der Horizontalschwingung in der oberen Hälfte der Schicht.

Brockamp (Potsdam).

Sezawa, Katsutada: Love-waves generated from a source of a certain depth. *Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo* 13, 1—17 (1935).

Von einem Erdbebenherd breiten sich zwei Wellenarten mit horizontaler Verrückung aus, reine Scherungswellen und Lovewellen. Die Verrückung der Lovewellen variiert wie eine negative Exponentialfunktion der Tiefe, wenn der Herd im unteren Mittel liegt, aber als harmonische Funktion der Tiefe, wenn das Störzentrum sich in der oberen Schicht befindet. Bei Scherungswellen ist die Bewegung im Medium ähnlich wie bei Oberflächenwellen, aber die Abnahme der Amplitude in Abhängigkeit von der Herdtiefe ist anders. Bei sehr tiefen Herden ist keine Verminderung der Amplitude bemerkbar.

Brockamp (Potsdam).

Matuzawa, Takeo: Über Schattenwellen und Kernwellen. *Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo* 13, 39—45 (1935).

Am Beispiel einer im unendlichen elastischen Medium eingebetteten Kugel wird untersucht, für welche Wellenlängen die Unstetigkeitsgrenze als solche zu betrachten ist. Je kleiner die Wellenlänge im Vergleich zum Kugelradius, um so klarer tritt die Schattenerscheinung des Erdkerns hervor.

Brockamp (Potsdam).

Kiepenheuer, K. O.: Bemerkungen zur Birkeland-Störmerschen Theorie des Polarlichtes. *Z. Astrophys.* 10, 279—284 (1935).

The author considers a stream of neutral ionized gas from the sun, approaching and enveloping the earth. He claims to show that if the density is low enough ($\leq 1 \text{ cm}^{-3}$) the electrons will approximately follow the paths calculated by Störmer for single charged particles subject only to electromagnetic and not to electrostatic forces. The proof appears however to be inadequate. The depth of penetration into the earth's atmosphere is also considered, for ions of speed $10^8 \text{ cm. sec.}^{-1}$, and atomic weights 1 and 4; in the latter case (e.g. for α -particles) it is concluded that the height of the end of their path would be 110 km. The calculation assumes, however, an expression for the atmospheric density which gives values that at this height are probably much too low; if so, the calculated heights should be materially increased. *S. Chapman.*

Geiger, H.: Die Sekundäreffekte der kosmischen Ultrastrahlung. *Erg. exakt. Naturwiss.* 14, 42—78 (1935).

Schwedelsky, K.: Fortschritte der Photogrammetrie in den letzten Jahren. *Z. Vermessgswes.* 64, 589—605 u. 609—628 (1935).

Eika, Tor: Beitrag zur Berechnung der geographischen Koordinaten der Dreieckspunkte. *Norske Vid. Selsk., Skr. Nr 7*, 1—17 u. deutsch. Zusammenfassung 18 (1935) [Norwegisch].

Köhr, J.: Mittelbare Bestimmung einer Richtung bei einer Kleintriangulation. *Allg. Vermessgs-Nachr.* 47, 525—530 (1935).